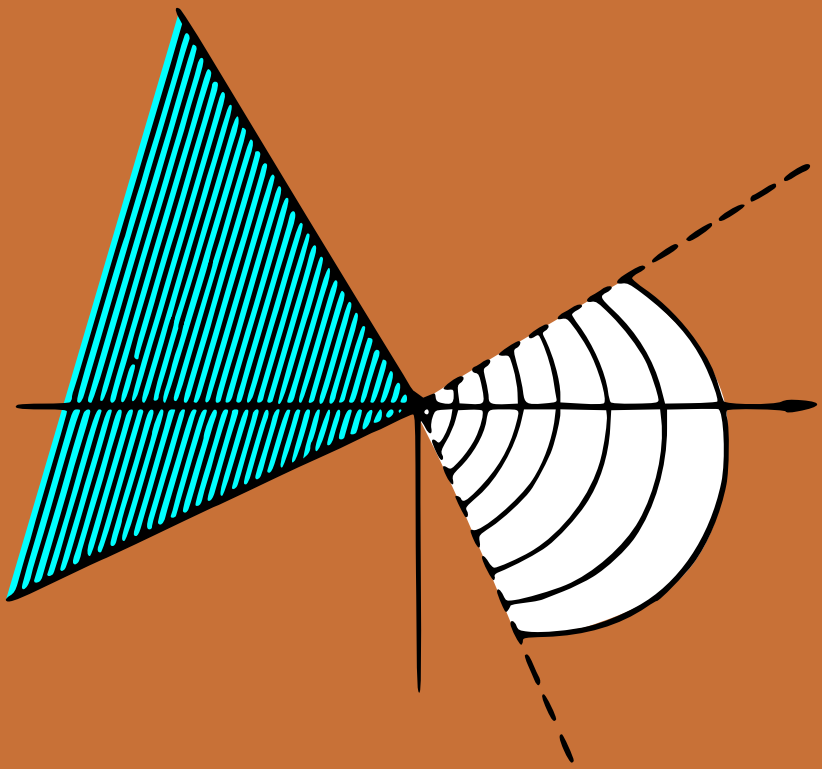
S. Aghmanov

PROGRAMMATION LINÉAIRE



Éditions Mir Moscou

С. А. АШМАНОВ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

S. ACHMANOV

PROGRAMMATION LINÉAIRE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par IRINA PÉTROVA

на французском языке

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1981
© Traduction française Editions Mir, 1984

PRÉFACE

Ce livre est un manuel de programmation linéaire destiné aux étudiants et boursiers de thèse en mathématiques, mathématiques appliquées et cybernétique économique. Il s'adresse également aux ingénieurs qui utilisent les modèles mathématiques de phénomènes réels.

Il paraît que les propriétés des systèmes d'inéquations linéaires excitent depuis longtemps l'intérêt des savants. Autour des années 1930, on dégage la classe des problèmes d'extrémum définis par une fonctionnelle linéaire sur un ensemble donné par des contraintes linéaires. Parmi les premiers savants qui étudient les programmes linéaires sous forme générale, on voit John von Neumann, grand mathématicien et physicien, à qui l'on doit le théorème fondamental des jeux matriciels et un modèle économique qui porte son nom, et le prix Nobel Lev Kantorovitch, de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., qui formule plusieurs problèmes de programmation linéaire et établit pour eux une méthode ressemblant beaucoup à la technique simpliciale.

En 1930, Tolstoï pose un problème de transport. Gavourine et Kantorovitch élaborent des procédés de résolution des programmes linéaires. Depuis la Deuxième Guerre mondiale, la programmation linéaire devient l'objet d'un vif intérêt aux Etats-Unis d'Amérique. La méthode du simplexe est mise au point par Dantzig suivi par Charnes, Ford et Fulkerson. Gale, Kuhn et Tucker s'inspirent des idées de von Neumann pour démontrer un théorème de dualité.

L'expérience accumulée en la matière montre qu'à part la mise en œuvre des algorithmes efficaces, un rôle toujours plus grand revient aux méthodes qualitatives permettant d'étudier les propriétés des problèmes de programmation linéaire. Notre livre y accorde notamment un peu plus d'attention que ce n'est la règle.

Le livre contient huit chapitres.

Le *Chapitre premier* est une sorte de préliminaire. On y examine certaines questions générales relatives aux modèles et plusieurs problèmes significatifs conduisant aux programmes linéaires. On formalise ceux-là moyennant des exemples concrets pour que le lecteur se familiarise avec le passage au symbolisme vectoriel et matriciel. Lorsqu'on aborde un modèle formel, on établit ses avantages sans oublier ses inconvénients afin de mettre en garde quiconque

voudra mettre en absolu les résultats et les recommandations mathématiques.

Le *Chapitre II* est consacré à la théorie des ensembles polyédriques convexes. Bien que la dualité et la méthode du simplexe puissent être exposées sans qu'on insiste là-dessus, nous estimons qu'on ne saurait comprendre en profondeur les problèmes de programmation linéaire sans connaître la structure des ensembles polyédriques. L'auteur a fait de son mieux pour être accessible. Les propriétés et les notions de base sont illustrées par des exemples et des figures qui rendent géométriquement sensibles (surtout dans le plan, plus rarement dans l'espace de dimension 3) les idées fondamentales. Le fait de discuter au préalable chaque résultat rend celui-ci intuitivement évident, si bien que dans certains cas (peu nombreux) le lecteur peu familier des démonstrations abstraites peut omettre celles-ci sans que la compréhension de la question traitée s'en ressentisse.

Le *Chapitre III* formule et démontre les théorèmes de dualité, résultat fondamental de la programmation linéaire.

Le *Chapitre IV* effectue une analyse qualitative des solutions de certains modèles significatifs et cite d'autres domaines d'application de la théorie de la dualité. Il donne par exemple le théorème du turnpike pour le modèle dynamique de Leontief (et on discute la signification de ce résultat important) et le théorème de substitution pour le modèle dynamique de relations intersectorielles. A part le théorème des jeux matriciels de von Neumann, exemple classique d'utilisation de la théorie de la dualité, on y trouve des résultats concernant les propriétés des ensembles des solutions des jeux à n personnes, toutes les démonstrations étant rendues particulièrement simples grâce au concept de dualité. Il y a lieu de signaler le théorème de Frobenius-Perron parlant des propriétés des matrices non négatives. On démontre le principe discret du maximum en programmation linéaire.

Le *Chapitre V* traite la méthode du simplexe.

Le *Chapitre VI* prépare le lecteur à appliquer la méthode du simplexe en programmation linéaire en nombres entiers. On décrit une autre manière de structurer l'information numérique (le tableau simplicial sous forme « lexicographique »). Cela sert de support d'une méthode de résolution des problèmes lexicographiques qui sera utilisée dans la suite pour motiver l'algorithme de Gomory de la programmation en nombres entiers.

Le *Chapitre VII* se propose de montrer la façon dont la procédure de calcul de la méthode simpliciale varie pour des classes spéciales de programmes linéaires. On s'appuie en premier lieu sur le problème de transport classique. Après avoir examiné la théorie rudimentaire des réseaux de transport, on montre que l'algorithme de simplexe se réduit dans ce cas à exécuter plusieurs opérations logiques pour

chercher les cycles du réseau. Une grande place est réservée à la programmation linéaire en nombres entiers et à certains modèles significatifs associés (problème du voyageur de commerce, problème du havresac, etc.).

Le *Chapitre VIII* donne une idée des difficultés consécutives à un problème mal posé. On discute l'importance de la question vu que toute information statistique reflète d'une façon approchée une situation réelle. On donne des exemples de méthodes de régularisation issues des idées de Tikhonov.

Le texte de presque tous les chapitres est suivi d'*Exercices*.

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à tous ses confrères de la chaire de Recherche opérationnelle à l'Université de Moscou qui l'ont grandement aidé à écrire ce livre.

S. Achmanov

CHAPITRE PREMIER

MODÈLES LINÉAIRES

§ 1. La programmation linéaire et les modèles linéaires

La *programmation linéaire* est un chapitre de la *programmation mathématique* qui étudie les méthodes de recherche de l'extrémum lié des fonctions de plusieurs variables. En Analyse mathématique classique, on se propose bien de chercher l'extrémum lié d'une fonction, mais dans plusieurs cas pratiques les procédés usuels s'avèrent insuffisants. Avec le progrès technique et industriel et l'implantation des ordinateurs, un rôle toujours plus grand incombe à la recherche des solutions optimales dans diverses sphères de l'activité humaine. Les problèmes d'optimum sont résolus essentiellement par recours aux modèles mathématiques, i.e. par une description formelle du phénomène réel qu'on étudie ensuite par des moyens mathématiques.

Voyons certains problèmes majeurs de la construction des modèles. Modéliser une situation réelle, c'est faire de l'idéalisation et de l'abstraction (on simplifie la position du problème et on néglige un peu son caractère spécifique). Prenons le problème scolaire d'un train qui part de A vers B. Ce modèle élémentaire illustre bien ce que nous venons de dire. En effet, si l'on suppose que le train va à une vitesse constante, on idéalise le phénomène car cela n'arrive guère dans la vie. D'autre part, les écoliers font abstraction du contenu du problème: s'ils ont une autre fois à résoudre un problème analogue relatif à une auto, ils procéderont de même sans se soucier de la différence entre les moyens de locomotion.

Mais ni l'idéalisation ni l'abstraction ne doivent pas être poussées trop loin, sinon le modèle élaboré cesse de traduire les traits essentiels de l'objet modelé, i.e. il ne lui est pas adéquat. D'autre part, si l'on construit un modèle complexe reflétant les moindres détails du phénomène, cela risque de saper les bases mêmes de la théorie des modèles dont l'un des buts est de simplifier le problème à étudier (un modèle trop compliqué ne se prête, en général, pas à l'analyse). L'art de modélisation, mathématique ou non, consiste à représenter le maximum de facteurs par les moyens les plus simples. Aussi on opère souvent de façon itérative. Dans un premier temps, on établit un modèle relativement simple et on l'analyse pour voir lesquelles des propriétés essentielles de l'objet concerné sont omises par le

schéma formel donné. Dans un second temps, on améliore le modèle initial.

Dans la plupart des cas, la réalité est approchée au degré 1 par un modèle dans lequel toutes les relations entre les variables caractéristiques de l'état de l'objet sont supposées linéaires. On constate souvent une analogie complète avec une fonction quelconque dont on veut connaître le comportement : l'information très importante, quelquefois exhaustive, provient en l'occurrence de l'étude de la dérivée (dans le voisinage de chaque point, on substitue à la fonction une relation linéaire). Les modèles linéaires décrivent d'une manière suffisamment fidèle et complète de nombreuses situations économiques, techniques, etc.

On comprend donc le rôle qui échoit à la programmation linéaire, procédé de recherche de l'extrémum lié d'une fonction linéaire sur un ensemble défini par des relations linéaires de type équation et inéquation (contraintes linéaires).

§ 2. Exemples de modèles linéaires

On trouve dans ce paragraphe plusieurs modèles simples assez connus qui représentent chacun une situation réelle. On les range parmi les modèles économico-mathématiques car ils utilisent cet indice économique qu'est le coût. Le fait est que la programmation linéaire sert essentiellement d'outil dans l'étude des modèles mathématiques relevant de l'économie.

Le premier modèle du paragraphe est le problème du régime alimentaire. Il est étudié avec force détails pour familiariser le lecteur avec la manière dont on formalise les problèmes significatifs et dont on passe au symbolisme matriciel. Après avoir présenté un modèle, on vérifie chaque fois s'il est adéquat au phénomène concerné. Si nous insistons sur les défauts majeurs des formulations abstraites spéciales à un modèle mathématique, c'est pour mettre en garde un lecteur désireux de porter à l'absolu les résultats qui s'ensuivent.

1. Problème du régime alimentaire. On se propose de réaliser l'alimentation la plus économique (i.e. la moins chère) qui respecte certaines recommandations du médecin. Ce problème intervient lorsqu'on a à nourrir une grande collectivité (les soldats, la clientèle d'une maison de cure, etc.). On suppose connue la liste de n aliments disponibles (pain, sucre, beurre, huile végétale, lait, pomme de terre, . . .) notés $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Soient $N_1, N_2, \ldots, N_m$ les composants caractéristiques des aliments (vitamines, substances minérales, lipides, protéines, glucides, calories, . . .). On connaît la composition nutritive prescrite des F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, i.e. la quantité de chaque élément ci-dessus par unité (kilogramme,

gramme) d'aliment. On construit le tableau résumant cet énoncé :

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & F_1 & F_2 & \dots & F_j & \dots & F_n \\
\hline
N_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
N_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
N_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
N_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{array}$$

Les éléments du tableau forment une matrice à m lignes et n colonnes. On la note A et on lui donne le nom de la *matrice de la nutrition.*

On admet qu'on a établi une ration alimentaire $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour une période (un mois, pour fixer les idées). En d'autres termes, on doit utiliser x_1 unités (kilogrammes, grammes) de F_1, x_2 unités de F_2, ... par personne et par mois. On calcule aisément la quantité mensuelle de vitamines, lipides, glucides, ... contenue dans la nourriture. L'apport de l'élément nutritif N_1 est égal à

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

parce que x_1 unités de l'aliment F_1 contiennent, conformément à la matrice de la nutrition, $a_{11}x_1$ unités de N_1 ; on y ajoute la part $a_{12}x_2$ de N_1 dans x_2 unités de l'aliment F_2, et ainsi de suite. On opère de même pour les autres éléments nutritifs N_i en présence dans la ration $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

On suppose que la médecine impose des conditions déterminées à la quantité de chaque N_i, $i = 1, 2, \dots, m$, nécessaire aux hommes pour la période envisagée. Elle stipule par exemple que la quantité de la vitamine C doit être au moins égale à une norme donnée (pour conjurer le danger du scorbut) ; le régime doit procurer au moins une telle quantité de calories, ... Ces exigences forment le vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ dont la i-ième coordonnée b_i représente la teneur minimale prescrite en N_i de la ration alimentaire. Cela veut dire que les composantes x_i du vecteur x doivent satisfaire au système de contraintes

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geqslant b_m.
\end{array} \tag{1.1}$$

On note de plus que bien que le problème n'ait pas de sens que si toutes les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont non négatives, on doit insister sur ce fait lorsqu'on formalise notre situation significative. En effet, en calcul automatique, l'ordinateur ne peut pas tenir compte de l'information relative à la signification de toutes les

entrées. Ainsi, on adjoint à (1.1) les inégalités

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Il est clair que tout régime alimentaire proposé pour la période considérée est tenu de remplir les conditions (1.1) et (1.2). Or, ces régimes peuvent être une infinité, et le médecin cède la place au comptable.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les prix des aliments $F_1, F_2, \ldots, F_n$ respectivement, si bien que le coût de la ration $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'écrit

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{1.3}$$

Le problème du régime alimentaire s'énonce finalement comme suit: parmi tous les vecteurs $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérifiant les contraintes (1.1), (1.2), trouver celui qui minimise (1.3).

Notre problème se trouve formalisé. A l'étape suivante, on ramène (1.1) à (1.3) à une forme plus commode. Etant donnée la règle de la multiplication d'une matrice par un vecteur, on peut dire que chacune des m expressions du premier membre des inégalités (1.1) est une coordonnée du vecteur Ax, où A est la matrice de la nutrition. Soient $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ deux vecteurs de même dimension (ayant un même nombre de coordonnées). On convient d'écrire $u \geqslant v$ si $u_1 \geqslant v_1, u_2 \geqslant v_2, \ldots, u_m \geqslant v_m$. Le système (1.1) se récrit

$$Ax \geqslant b.$$

L'inégalité $x \geqslant 0$ signifie que le vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a toutes ses composantes non négatives. Quant à l'expression $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, elle s'écrit comme produit scalaire $\langle c, x\rangle$ de deux vecteurs, où $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Avec ces conventions, le problème de déterminer le régime alimentaire le moins coûteux s'écrit brièvement en notations matricielles:

$$\begin{gathered} \min \langle c, x\rangle \\ Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Dressons le bilan. Nous avons mis un problème assez vital sous forme mathématique rigoureuse, ce qui autorise à utiliser, pour chercher sa solution, toute la gamme des méthodes mathématiques. D'autre part, les formules (1.1) à (1.4) ne laissent rien paraître du contenu réel du problème, si bien qu'aucun effort mathématique ne nous sauvera des résultats abracadabrants au cas où le modèle (1.4) néglige certains facteurs importants du point de vue de sens. On voit par exemple que ce modèle ne reflète pas d'une façon exhaustive la situation originelle. Il suffit de dire que les contraintes médicales imposées à la quantité nécessaire de l'élément N_i peuvent être autres: cette quantité doit être au plus égale à un nombre donné.

(Cette contrainte supplémentaire est, à vrai dire, facile à introduire, et le problème (1.4) ne varie guère.) On n'oubliera pas non plus que les contraintes (1.1) et la fonction à minimiser (1.3) traduisent les desiderata d'un médecin et d'un économiste et ignorent ceux des hommes qui sont censés pratiquer ce régime alimentaire. Le modèle (1.4) n'exige pas que la ration (régime) alimentaire soit mangeable. Parlons d'une tentative d'élaborer une ration bon marché.

Un article a paru en 1945 qui traitait un problème du régime alimentaire avec des caractéristiques numériques concrètes (voir [11]). On a pris 77 aliments et 9 éléments nutritifs tels que la vitamine A, les protéines, les glucides, etc., et on a calculé la ration alimentaire annuelle par personne. La méthode du simplexe (voir ch. V) a donné une solution optimale. Etant données les particularités du procédé, la solution ne comprenait en tant que strict nécessaire que 9 aliments sur 77 produits disponibles, à savoir la farine de froment, le maïs, le lait condensé, l'huile végétale, le lard, le foie de bœuf, le chou, la pomme de terre, l'épinard. Le régime alimentaire ainsi obtenu coûtait 39 dollars 67 cents (estimations 1939) et était absolument insipide, donc inacceptable, tandis que le prix d'un régime raisonnable élaboré par un diététicien était 115 $.

Cette expérience malheureuse est fort instructive, mais on ne doit pas en conclure à l'échec du modèle décrit. *Primo*, on peut adjoindre aux contraintes les conditions limitant la quantité de chaque aliment consommé et les conditions qui tiennent compte de la compatibilité de divers aliments. *Secundo*, une méthode libre de certains défauts du procédé simplicial aboutit à une solution optimale qui constitue un régime plus riche.

Nombreux sont par ailleurs des cas d'autres domaines où le modèle décrit s'applique tel quel sans qu'on change d'énoncé et de procédé standard de résolution. Ainsi, on l'a utilisé avec succès pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse pour les bovins [12]. Un autre exemple est l'élaboration de plusieurs mélanges de produits pétroliers qui soient le moins chers tout en satisfaisant à certaines caractéristiques techniques (indice d'octane, volatilité, etc.). On espère donc un développement des applications du problème du régime alimentaire.

2. **Problème de transport.** Soient m points $S_1, S_2, \ldots, S_m$ qui produisent un bien homogène (charbon, ciment, ...), le volume de production de S_i étant a_i unités. Soient n points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ consommateurs de ces produits, le déficit de Q_j étant b_j unités, $j = 1, 2, \ldots, n$. On demande un programme de transport entre S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, et Q_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, tel qu'on comble les déficits b_j, évite une disponibilité excessive et minimise la dépense de transport.

Soit c_{ij} le coût de transport d'une unité (disons, d'une tonne) du produit de S_i vers Q_j. On suppose que le problème est linéaire, si

bien que le coût de réalisation du transport de x_{ij} unités entre ces points est égal à $c_{ij}x_{ij}$.

On appelle *programme de transport* un ensemble de nombres (x_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, qui respecte les contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \tag{1.5}$$
$$x_{ij} \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

On interprète facilement les équations (1.5): étant donné (x_{ij}), on transporte de S_i à Q_j les produits en quantité $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ qui doit être égale à la disponibilité a_i. Le point Q_j reçoit au total, en provenance de tous les S_i, les biens en quantité $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ qui doit être égale à la demande b_j. Dans ce cas, la dépense de transport est

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \tag{1.6}$$

Le problème de transport s'énonce finalement comme suit: parmi tous les ensembles (x_{ij}) vérifiant les contraintes (1.5), trouver celui qui rend (1.6) minimal.

3. Utilisation rationnelle des terres à cultiver. Soient m terres $S_1, S_2, \ldots, S_m$ sur lesquelles on peut procéder à divers types de cultures. Les terres diffèrent soit par la position, soit par le sol. Sur chacun de ces champs S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, une ou plusieurs cultures (froment, seigle, maïs, pomme de terre, ...) $Q_1, Q_2, \ldots$ $\ldots, Q_n$ sont possibles. On suppose que le rendement de S_i ensemencé en Q_j est a_{ij} quintaux par hectare. On note a_i la surface en hectares du champ S_i. Les contraintes du problème sont les suivantes: on se donne le programme de production b_j de chaque culture Q_j. On connaît les prix d'achat c_j de chaque produit Q_j; on demande un programme d'ensemencement des terres qui maximise le bénéfice réalisé par la vente des produits agricoles.

Soit x_{ij} la surface (en hectares) du i-ième champ occupé par la culture Q_j. Le modèle mathématique du problème proposé s'écrit

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \geqslant b_j,$$
$$x_{ij} \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

4. Elaboration d'un programme de production. On examine l'activité d'une unité économique (usine, atelier). On demande un programme de production tel que les objectifs soient réalisés le mieux possible. On connaît le potentiel technologique de l'économie, ainsi que la quantité des ressources (matières premières) disponibles. Soient m ressources $R_1, R_2, \ldots, R_m$ qui peuvent être le métal, l'énergie électrique, les produits livrés par d'autres entreprises. On suppose que l'économie produit n biens $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

On appelle *activité* produisant le bien G_j un ensemble de nombres (a_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$, qui représentent la quantité des ressources R_i nécessaire pour fabriquer une unité de G_j. Ainsi, on assimile la production du bien G_1 à une chaîne de fabrication qui consomme successivement les ressources en quantités $a_{11}, a_{12}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$ pour donner à la sortie une unité du bien G_1.

On forme la *matrice technologique*

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & G_1 & G_1 & \ldots & G_j & \ldots & G_n \\
\hline
R_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
R_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
R_i & a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ni} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
R_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{array}$$

qui décrit l'ensemble des activités de l'unité économique donnée. On la désigne par A.

Soit donnée la quantité b_i des ressources R_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, consommées par l'entreprise; on pose $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ (*vecteur des ressources*). On appelle *programme de production* un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui fixe la quantité des biens $G_1, G_2, \ldots, G_n$ à produire.

On suppose que la technologie est linéaire, i.e. la dépense de ressources est directement proportionnelle au volume de production. On admet plus précisément que les biens consommés pour la fabrication de x_j unités de G_j sont définis par le vecteur $(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \ldots, a_{mj}x_j)$, et en présence de plusieurs activités ces dépenses s'additionnent.

Ainsi, les dépenses en ressources nécessaires pour réaliser le programme de production $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont données par le vecteur de coordonnées

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n,
\end{array}$$

ou, en notations matricielles, par le vecteur Ax. La condition de ressources limitées s'écrit $Ax \leqslant b$. Etant donné un vecteur des ressources b, l'unité économique considérée produit donc tout ensemble de biens x vérifiant les contraintes $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$. Ce vecteur x n'est en général pas unique, et on a à choisir un programme optimal (dans un sens).

Voyons le problème d'optimum posé de deux manières différentes. Soit donnés les prix $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ des biens produits $G_1, G_2, \ldots, G_n$. On demande un programme de production pour lequel le coût des produits soit maximal. Formalisons ce problème:

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Cela correspond à la planification en volume. S'agissant de la nomenclature, on procède autrement. Soit $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ le vecteur lot de biens fabriqués; on veut que le nombre de lots soit aussi grand que possible. On désigne par α le nombre de lots sortis par l'entreprise. On prend le problème

$$\max \alpha$$
$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant \alpha\hat{x}, \quad x \geqslant 0. \tag{1.8}$$

L'inégalité $x \geqslant \alpha\hat{x}$ signifie que le vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contient au moins α lots complets $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$.

Les modèles (1.7), (1.8) ont beau refléter certaines propriétés de la production réelle, ils sont très idéalisés. Ils ne tiennent pas compte par exemple de ce facteur essentiel qu'est le temps. On suppose en outre que les ressources nécessaires R_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, ne font jamais défaut. Ainsi, on néglige les problèmes brûlants relatifs à la dynamique de la production et au caractère rythmique des livraisons. Nos modèles n'incorporent pas non plus la dépense en main-d'œuvre ni plusieurs autres indices inhérents à tout processus productif réel.

5. Modèle dynamique de planification. De nombreux modèles des problèmes de production relèvent du bilan des échanges interindustriels. Il n'entre pas dans nos intentions d'exposer l'historique de cette méthode d'étude de l'économie nationale. On rappelle seulement que l'idée en est née en Union Soviétique autour des années 1920 pour être ensuite développée par les économistes américains (voir [14]).

Le modèle d'équilibre intersectoriel et ses diverses modifications ont inspiré de nombreux auteurs (on n'a qu'à s'adresser aux ouvrages [14] à [17]); nous allons en donner une variante simplifiée sans que le côté mathématique du modèle en souffre d'une manière quelconque.

On suppose que l'économie est divisée en n branches d'activités ou secteurs (industries) ayant chacun une production homogène. Le secteur ainsi défini est une abstraction économique qui ne revêt pas nécessairement une forme concrète (ministère, firme, groupe). Ainsi, le secteur « énergie électrique » comprend toutes les centrales quel que soit le département dont elles relèvent. On conçoit que le fait d'utiliser les industries « pures » seules entrave la mise en œuvre du modèle de bilan intersectoriel car la planification et la comptabilité portent en réalité sur des organismes concrets. Cela permet par contre une analyse en profondeur de la structure technologique de l'économie, et, fort de l'expérience du schéma simplifié, on construit des modèles plus significatifs.

Revenons à notre modèle. On suppose que chaque industrie produit un seul bien et que tous les biens fabriqués sont différents. Ainsi, l'unité économique examinée fabrique n biens. Chaque industrie utilise les produits fournis par d'autres secteurs.

On établit à un temps (en l'an T_0, par exemple) la comptabilité de l'économie nationale pour une période fixe (disons, pour l'année passée) (voir tableau 1). Ici $\bar{a}_{ij}$ représentent la quantité du bien i consommée par l'industrie j au cours de la période envisagée; $\bar{V}_j$ est la production globale de l'industrie j et c_j sa production employée par les secteurs improductifs, pour former les stocks, etc. Les nombres $\bar{a}_{ij}$, $j=1, 2, \ldots, n$, montrent la ventilation du bien i entre les industries.

Le tableau traduit l'équilibre intersectoriel; on a les relations

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{V}_i - \bar{c}_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Les quantités indiquées sont mesurées soit en unités physiques (tonne, unité, kWh, ...), soit en unités monétaires, ce qui détermine deux sortes de bilans, le bilan matériel et le bilan en valeur. Pour fixer les idées, on se placera dans le premier cas.

Si l'on divise tous les éléments de la colonne j (tabl. 1) par $\bar{V}_j$, le nombre $a_{ij} = \bar{a}_{ij}/\bar{V}_j$ est la quantité du bien fabriqué par l'industrie i qui est nécessaire pour la production unitaire de l'industrie j, et le nombre $c_j = \bar{c}_j/\bar{V}_j$ constitue l'apport de celle-ci aux secteurs non productifs.

Dans un sens, les nombres a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, caractérisent complètement les possibilités technologiques du secteur j durant la période concernée: la quantité donnée de biens consommés (inputs) ainsi structurés permet de produire une unité de bien. On donne aux nombres a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, le nom de *coefficients d'inputs directs* du secteur j.

La matrice $A = (a_{ij})$ est intéressante en elle-même car on y puise une information abondante sur la structure des relations inter-

Tableau 1

Secteurs / Biens	1	2	...	n	
1	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	...	$\bar{a}_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{1j}$
2	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	...	$\bar{a}_{2n}$	$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{2j}$
...	...	...	...	...	...
n	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{a}_{2n}$	...	$\bar{a}_{nn}$	$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{nj}$
Production globale	$\bar{V}_1$	$\bar{V}_2$	...	$\bar{V}_n$	
Consommation finale	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$	...	$\bar{c}_n$	

industrielles et sur la technologie de la production. Mais elle est autrement plus précieuse en tant qu'un instrument de la planification et de la prévision à court et long terme. On fait deux hypothèses importantes.

1. La technologie est supposée constante pendant un intervalle $[T_0, T]$, avec $T > T_0$. Selon la façon dont le problème est posé, $[T_0, T]$ est égal à une période (disons, une année) ou à plusieurs périodes.

2. La technologie est supposée linéaire. On admet notamment que pour que le secteur j fournisse la production totale x_j, il faut et il suffit qu'il consomme la quantité $a_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, des outputs (produits) des autres secteurs.

Dans les deux cas, on idéalise manifestement la situation réelle. Ainsi, la condition de linéarité signifie en particulier que chaque industrie fournit des biens en quantité illimitée si l'on lui livre des ressources nécessaires. Or, les possibilités de production de toute industrie sont limitées par la main-d'œuvre disponible et les fonds fixes existants (équipements, aires de production, etc.). Avec le modèle dynamique, ce défaut sera en partie corrigée.

Nous dirons que la matrice $A = (a_{ij})$ décrit la technologie pour les industries utilisées *au niveau unité*. Supposons qu'au temps $[T_0, T]$ toutes les industries travaillent de sorte que l'industrie j, $j = 1, 2, \ldots, n$, fournit la production totale x_j. On dira que

l'industrie j est menée *au niveau* x_j. On désigne par $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le vecteur production globale (*vecteur des niveaux de production*). Étant donnée l'hypothèse de linéarité, on calcule sans peine la part de la production totale qui constitue les inputs des industries. Elle est définie par le vecteur

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right).$$

En notations matricielles, le vecteur inputs des industries est Ax. Le reste $c = x - Ax$ va aux secteurs improductifs.

Mais le problème capital intervenant dans la planification étendue sur la période $[T_0, T]$ est, de règle, l'inverse: connaissant le vecteur consommation finale c, on demande le vecteur production totale x nécessaire. Autrement dit, il faut résoudre le système d'équations

$$x - Ax = c \tag{1.9}$$

pour le vecteur c et la matrice A donnés.

Cette équation et l'interprétation ci-dessus de la matrice A et des vecteurs x, c constituent le *modèle de Leontief*. Le modèle est dit *productif* s'il existe pour tout vecteur demande $c \geqslant 0$ une solution $x \geqslant 0$ de l'équation (1.9).

Le modèle usuel de bilan des relations inter-industrielles est infiniment plus riche que cette variante simplifiée. La différence tient essentiellement à ce qu'il exprime en détail les composantes du vecteur demande finale telles que les accumulations globales (qui comprennent, entre autres, les gros investissements et l'accroissement de stocks), la consommation individuelle, le secteur improductif tout entier (santé publique, science, organisations culturelles, ...). L'information fournie par un tel tableau décrit complètement non seulement les échanges inter-industriels de l'économie nationale, mais aussi la distribution et la redistribution du produit national.

Le modèle de Leontief est, on le répète, représentatif des possibilités latentes seules de la technologie, et le modèle (1.9) ignore le facteur temps. On suppose notamment que le processus de production ne dure pas et que tous les produits intermédiaires sont livrés à l'instant requis. Formellement, on peut élaborer un modèle du type (1.9) qui fait la distinction entre un bien produit à tel moment et un bien du même type fabriqué à un moment ultérieur, mais le tableau des échanges inter-industriels est impuissant à fournir l'information statistique nécessaire.

On y arrive avec les modèles dynamiques du type Leontief (*modèles dynamiques de bilan des échanges inter-industriels*). Pour refléter le décalage temporel (qui est particulièrement important pour des branches telles que le bâtiment), on décompose la matrice A en plusieurs blocs dont l'un représente par exemple les coefficients

d'inputs des grands travaux de construction. Un lecteur désireux d'entrer dans le détail de la question n'a qu'à consulter la littérature recommandée. Il est cependant classique qu'un modèle plus complet se prête moins bien à l'analyse théorique. Aussi nous nous limiterons au modèle de Leontief décrit afin de mettre en relief les idées de base qui gouvernent l'étude d'une grande classe de modèles des problèmes de production.

Soit un intervale de planification de T périodes (semaines, mois, années). On consomme au temps initial le stock existant de biens $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et on produit un vecteur des biens $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$. Ce vecteur est utilisé comme input, et ainsi de suite. Le choix du vecteur x^{t+1} produit à partir de x^t n'est pas unique, si bien que la suite $\{x^1, x^2, \ldots, x^T\}$ n'est que l'une des trajectoires d'évolution possibles. Le choix d'une trajectoire obéit à différents impératifs. Pour notre part, nous estimerons, pour fixer les idées, que la fonction économique est de la forme $c_1x_1^T + c_2x_2^T + \ldots + c_nx_n^T$, le vecteur $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ étant assimilé par exemple aux prix des biens à l'instant final de la période de planification. Formalisons le modèle dynamique:

$$\begin{gathered} \max \langle c, x^T \rangle \\ Ax^{t+1} \leqslant x^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T-1, \\ x^t \geqslant 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Le modèle a beau être libéré du statisme contraignant, il reste fort simplifié. Comme le modèle statique de Leontief, il néglige le décalage temporel dans l'accumulation des fonds de production fixes (plus précisément, il s'agit de variations importantes de ce décalage). S'il suffit, disons, d'une année pour mettre en exploitation une série nouvelle de machines-outils, la période de construction d'une usine ou d'une centrale électrique est des fois beaucoup plus longue. Il y a plus. Le modèle ne reflète pas l'infrastructure de la production, par exemple les transports. Malgré ces défauts, les résultats qualitatifs obtenus changent peu avec le passage aux modèles plus riches et plus significatifs.

6. Utilisation rationnelle de la main-d'œuvre. On généralise le modèle de Leontief du numéro précédent au cas où plusieurs industries peuvent produire un même bien. Soit de nouveau une économie à n produits. Il existe m ($m > n$) activités qui fournissent chacune un seul bien. On suppose, pour fixer les idées, que l'ensemble $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ est partagé en n parties M_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, telles que $M_k \cap M_{k'} = \varnothing$ pour $k \neq k'$, $M = \bigcup_{k=1}^{n} M_k$. On admet que l'activité $j \in M_k$ produit le bien k. Soit la $n \times m$-matrice technologique $\hat{A}$. La colonne a_{ij} donne la consommation des biens i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nécessaires à l'activité j pour fabriquer le bien k,

$j \in M_k$. A la différence du modèle usuel de Leontief, la matrice des outputs $\hat{I}$ est rectangulaire (et non carrée) à n lignes et m colonnes, formée de 1 et 0, l'élément $e_{ij} = 1$ si $j \in M_i$ et $e_{ij} = 0$ dans le cas contraire. Ainsi, c'est le couple $\hat{A}$, $\hat{I}$ qui définit la technologie de l'économie considérée.

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ le vecteur des niveaux des activités du modèle généralisé de Leontief, auquel cas les inputs utilisés dans la production sont donnés par le vecteur $\hat{A}x$ et la production totale, par le vecteur $\hat{I}x$. Si le vecteur demande finale est c, $c \geqslant 0$, alors l'analogue de l'équation fondamentale du modèle de Leontief s'écrit

$$\hat{I}x - \hat{A}x = c. \tag{1.11}$$

Le modèle généralisé de Leontief ainsi énoncé est censé être productif, i.e. le problème (1.11) admet une solution non négative $x \geqslant 0$ pour tout vecteur demande finale $c \geqslant 0$. Pour cela, il suffit qu'il existe une liste de n activités (chaque activité fournissant un seul type de produit) telle que le modèle usuel de Leontief associé soit productif.

On admet qu'il correspond à chaque activité i (colonne de $\hat{A}$) un nombre positif l_i, coefficient d'inputs de travail. On introduit les notations suivantes: $\tilde{A} = \hat{I} - \hat{A}$; $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$, et on prend le problème de programmation linéaire:

$$\begin{gathered} \min \langle l, x \rangle \\ \tilde{A}x \geqslant c, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.12}$$

On l'interprète facilement: garantir une demande finale $c \geqslant 0$ en employant une main-d'œuvre minimale.

Il se trouve que le problème proposé (1.12) présente la propriété suivante: il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes les activités car il existe un ensemble de n activités (chaque activité produisant un bien et un seul) tel qu'à force de le mettre en œuvre on soit conduit à l'optimum (au sens de l'économie du travail) pour tout vecteur demande finale c. Le résultat sera démontré dans le chapitre IV.

7. Technologie chimique. Soient N réacteurs chimiques en série dans lesquels on traite une matière première afin d'isoler une substance utile, et soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la caractéristique de celle-ci (x_1 est, par exemple, sa concentration dans le milieu, $x_2, \ldots, x_n$ sont certaines autres propriétés qui intéressent le chercheur). On désigne par $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ la caractéristique de la substance à l'entrée du k-ième réacteur, si bien que x^{k+1} est celle à la sortie.

Soit $u^k = (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_m^k)$ l'ensemble de paramètres qui gouvernent la transformation chimique dans le réacteur k (ces paramètres sont entre autres le nombre de catalyseurs, la tempéra-

ture, l'intensité de courant). On suppose connue la relation $x^{k+1} = f_k(x^k, u^k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, f_k caractérisant le réacteur k. Cela étant, on impose au vecteur u^k diverses contraintes $\varphi_k(u^k) \leqslant d_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, qui peuvent être des contraintes d'intensité de courant, de température, de consommation totale de catalyseurs, de rapport de catalyseurs.

On demande les valeurs des paramètres de commande u^k, $k = 1, 2, \ldots, N$, qui maximisent la quantité $\psi(x^1, x^2, \ldots, x^N, u^1, u^2, \ldots, u^N)$ pour la caractéristique initiale $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ donnée. La quantité en question peut être le coût de la substance à la sortie du dernier réacteur.

Si toutes les fonctions f_k, φ_k, ψ sont linéaires, on est en présence d'un programme linéaire. Il s'agit d'un *problème linéaire de commande optimale à temps discret*. Sa forme générale est

$$\max\left\{\langle c^{N+1}, x^{N+1}\rangle + \sum_{k=1}^{N}(\langle c^k, x^k\rangle + \langle b^k, u^k\rangle)\right\} \tag{1.13}$$

$$x^{k+1} = A_k x^k + B_k u^k, \quad D_k u^k \leqslant d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad x^1 = \hat{x}.$$

On note qu'on ramène à (1.13) de nombreux problèmes qui ne se posent pas comme les problèmes dynamiques. Voyons, par exemple, le problème de transport du n° 2.

On introduit la quantité

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

quantité totale du bien transporté de l'origine S_i vers les k premières destinations Q_j. Evidemment,

$$y_{ik} = y_{i,\,k-1} + x_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où

$$y_{i0} = 0 \quad y_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i.$$

Avec les notations $y^k = (y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk})$, $x^k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk})$, on énonce le problème de transport en termes suivants.

Définir les vecteurs successifs x^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, solution du problème

$$\max \sum_{k=1}^{n} \langle c^k, x^k\rangle$$

$$y^k = y^{k-1} + x^k, \quad \langle x^k, e\rangle = b_k, \quad y^0 = 0, \quad y^n = a, \tag{1.14}$$

où $c^k = (c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{mk})$, $e = (1, 1, \ldots, 1)$, $e \in \mathbf{R}^m$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

On a manifestement un cas particulier du problème (1.13) (aux notations près, ce sont x^k qui représentent les paramètres de commande dans (1.14)).

§ 3. Formes des problèmes de programmation linéaire et leur équivalence

Les situations significatives du paragraphe précédent sont des plus diverses. Il n'empêche que les problèmes mathématiques d'extrémum associés ont beaucoup de commun. On cherche chaque fois à maximiser (ou à minimiser) une fonction linéaire de plusieurs variables. Les contraintes imposées à l'ensemble des variables sont, ou bien des inéquations linéaires, ou bien des équations linéaires. Il est vrai que les contraintes-inéquations sont souvent dans les sens différents: dans un cas, la fonction linéaire des variables est supérieure à une constante, et dans un autre, elle lui est inférieure. Mais il est clair qu'on est toujours amené à des inéquations dans le même sens (en multipliant, si besoin est, les deux membres par -1).

Selon le type des contraintes, les programmes linéaires se présentent sous trois formes différentes.

PROBLÈME LINÉAIRE SOUS FORME STANDARD.

$$\begin{gathered}\max\ (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)\\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \leqslant b_m,\\ x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\end{gathered}$$

ou, en notations matricielles,

$$\begin{gathered}\max\ \langle c,\ x\rangle\\ Ax \leqslant b,\quad x \geqslant 0,\end{gathered}$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $A = (a_{ij})$ est la matrice des coefficients des contraintes. Le vecteur c s'appelle le *vecteur des coefficients de la forme linéaire* et le vecteur b est le *vecteur des contraintes*.

L'intérêt des programmes linéaires sous forme standard tient à ce que de nombreux modèles d'applications se ramènent le plus naturellement à cette classe de problèmes de programmation linéaire.

PROGRAMME LINÉAIRE SOUS FORME CANONIQUE.

$$\begin{gathered}\max\ (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)\\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,\\ x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\end{gathered}$$

ou, en notations matricielles,

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax = b, \quad x \geqslant 0.$$

C'est justement pour les problèmes sous forme canonique qu'on a mis au point les principaux algorithmes de calcul (méthode du simplexe et ses variantes) en programmation linéaire.

PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE.

Certaines contraintes du problème sont des inéquations et certaines autres des équations. Toutes les variables ne sont pas assujetties à être non négatives.

$$\max (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$
$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leqslant b_k,\\
&a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1},\\
&a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m}x_n = b_m,\\
&x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_r \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ici $k \leqslant m$, $r \leqslant n$. Il est clair que le problème standard est un cas particulier du cas général pour $k = m$, $r = n$, et que le problème sous forme canonique l'est si $k = 0$, $r = n$.

Il y a équivalence des trois types de programmes linéaires, i.e. on convertit chacun d'eux par des transformations simples en les deux autres. Aussi une méthode valable pour un programme linéaire (disons, une forme canonique) permet de résoudre tout problème de programmation linéaire.

Prenons, par exemple, les problèmes standard et canonique. Comment on transforme le premier en le second? On introduit les variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$ en nombre égal à celui des contraintes. Soit le problème canonique

$$\max (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0\cdot z_1 + \ldots + 0\cdot z_m)$$
$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m,\\
&x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,\\
&z_1 \geqslant 0, \quad z_2 \geqslant 0, \ldots, z_m \geqslant 0,
\end{aligned}$$

ou, en notations matricielles,

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax + z = b, \quad x \geqslant 0, \ z \geqslant 0.$$

Soit $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*)$ une solution du problème énoncé. La recherche de la solution du problème sous forme standard ne présente aucune difficulté; c'est le vecteur $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. En effet, ce vecteur respecte manifestement toutes les contraintes du programme linéaire standard: ses coordonnées sont non négatives (cette exigence reste entière pour le problème canonique), et $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* + z_i^* = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, entraînent $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, par suite de la non-négativité des nombres $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*$.

On admet maintenant que le vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ n'est pas une solution du problème sous forme standard, auquel cas on trouve un vecteur $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ qui vérifie toutes les contraintes de ce problème et donne une valeur plus grande de la fonction à maximiser par rapport à celle procurée par x^*: $c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n > c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_nx_n^*$. Montrons que la chose est impossible. On construit un vecteur satisfaisant à toutes les contraintes du problème sous forme canonique tel que la fonction économique (à maximiser) réalise sur ce vecteur une valeur plus grande que sur $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*)$ qui n'est donc pas un vecteur optimal.

Prenons le vecteur $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m)$, où $\bar{z}_i = b_i - (a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Comme $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ remplit les contraintes du problème standard, on a $\bar{z}_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Dans ce cas, le vecteur $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)$ vérifie toutes les contraintes du problème canonique auxiliaire, et $\langle c, \bar{x}\rangle > \langle c, x^*\rangle$, i.e. $(x_1^*, \ldots, x_n^*, z_1^*, \ldots, z_m^*)$ n'est pas optimal. Cette contradiction démontre l'affirmation voulue. Ainsi, un programme linéaire sous forme standard peut être ramené à la forme canonique.

La transformation contraire s'avère encore plus simple. En effet, il suffit de substituer à chaque contrainte-équation deux inéquations:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leqslant -b_i. \end{cases}$$

Si la variable x_j du problème général n'est pas assujettie à être non négative, on ramène celui-ci à un problème sous forme standard en posant $x_j = u_j - v_j$ (u_j, v_j étant de nouvelles variables) et en imposant les conditions $u_j \geqslant 0$, $v_j \geqslant 0$.

Le cas de la forme linéaire $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ à minimiser se ramène aisément à la recherche d'un maximum : on demande à maximiser la fonction $-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$.

Reprenons les problèmes du paragraphe précédent. Le modèle (1.7) de l'élaboration d'un programme de production est une forme standard, ainsi que le problème du régime alimentaire (où l'on transforme $Ax \geqslant b$ en $-Ax \leqslant -b$). Le modèle de transport constitue un problème canonique (on sait déjà que le fait de demander à minimiser la fonction économique est sans importance). S'agissant du modèle d'utilisation rationnelle des terres à cultiver, on est en présence d'un cas général.

La variante (1.8) du problème de production est proche d'un programme standard. En effet, on introduit le vecteur $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha)$ à $n + 1$ coordonnées. Le vecteur des coefficients de la forme linéaire est dans ce cas $\bar{c} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, la matrice des contraintes s'écrit

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & \hat{x}_1 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & \hat{x}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \hat{x}_n \end{pmatrix},$$

et le vecteur des contraintes est $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0)$.

Avec ces notations, le problème (1.8) prend la forme :

$$\max \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle$$
$$\bar{A}\bar{x} \leqslant \bar{b}, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0.$$

Etant donnée l'absence de la condition $\alpha \geqslant 0$, on rapporte formellement ce problème à la catégorie des programmes linéaires généraux.

Le modèle d'utilisation rationnelle de la main-d'œuvre (1.12) est ramené par des transformations évidentes à un problème sous forme standard.

Le modèle dynamique de planification (1.10) exige quelques éclaircissements. Il s'agit évidemment d'un problème sous forme standard. Explicitons la matrice des coefficients et le vecteur des contraintes. Le vecteur des variables est en l'occurrence $\bar{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^t, \ldots, x^T)$ de dimension $n \times T$ parce que chaque lettre x^t désigne ici un vecteur n-dimensionnel $x^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_n^t)$. Le vecteur des coefficients de la forme linéaire est $\bar{c} =$

$= (0, 0, \ldots, 0, c)$, avec $n - 1$ vecteurs nuls n-dimensionnels à la place des zéros. La matrice des contraintes s'écrit

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -I & A & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -I & A & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -I & A \end{pmatrix}.$$

Le vecteur des contraintes est égal à $\bar{b} = (x_0, 0, 0, \ldots, 0)$, où 0 désigne une fois de plus le vecteur nul de dimension n. On constate sans peine l'équivalence du problème en termes de matrices

$$\max_{\bar{A}\bar{x} \leqslant \bar{b},\ \bar{x} \geqslant 0} \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle \tag{1.15}$$

et de (1.10).

Précisons la terminologie de la programmation linéaire que nous employons dans ce livre. La forme linéaire $\langle c, x \rangle = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ à maximiser (ou à minimiser) est appelée *fonction économique*. Un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respectant toutes les contraintes du problème constitue un *vecteur réalisable* ou un *programme*. Un problème de programmation linéaire qui admet un vecteur réalisable est dit *avoir un sens*. On appelle *solution* ou *programme optimal* tout vecteur réalisable x^* qui rend maximum la fonction économique. La valeur maximale $d = \langle c, x^* \rangle$ de la fonction économique est connue sous le nom de *valeur du problème*.

Voyons si les problèmes du § 2 ont un sens. S'agissant du problème du régime alimentaire avec les contraintes (1.1), (1.2), cette propriété n'a lieu que pour certaines valeurs des paramètres a_{ij} et b_i. En effet, si tous les éléments a_{1j} de la première ligne de A sont nuls et b_1 est positif, alors il n'existe pas de vecteur réalisable x. Mais la condition $a_{1j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, signifie que l'élément N_1 est absent de tous les aliments considérés. Le problème a donc un sens sous la condition nécessaire que tout élément N_i soit contenu au moins dans un des aliments, i.e. chaque ligne de la matrice A a au moins un élément positif. La signification des coefficients a_{ij} implique leur non-négativité, si bien que la condition est suffisante car on peut évidemment prendre x de x_i suffisamment grands pour que toutes les contraintes (1.1) soient nécessairement vérifiées.

L'ensemble des vecteurs réalisables du problème de transport est manifestement non vide si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} b_j = D = \sum_{i=1}^{n} a_i$, i.e. si l'offre est égale à la demande. En effet, si le programme (x_{ij}) est réalisable, on somme la première égalité (1.5) par rapport à i et

la seconde, par rapport à j, et on a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

D'autre part, on vérifie aisément qu'avec la condition d'équilibre de l'offre et de la demande, il existe un programme réalisable $(x_{ij}) = a_i b_j / D$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Il est clair que tout problème d'utilisation rationnelle des terres à cultiver n'a pas un sens (les programmes de production indicatifs b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, ne doivent pas être trop importants).

Prenons les problèmes (1.7), (1.8), (1.10) dont les deux premiers consistent à élaborer un programme de production et le troisième représente le modèle dynamique de planification. Ils ont un sens si les vecteurs des ressources b et x_0 sont non négatifs (on le sous-entend) parce que le vecteur nul satisfait à toutes les contraintes.

La même propriété du problème (1.12) (utilisation rationnelle de la main-d'œuvre) découle de l'hypothèse de $\hat{A}$ productive.

La recherche d'un programme optimal n'a naturellement lieu que si le problème a un sens. On note néanmoins que tout programme linéaire ayant un sens n'admet nécessairement pas une solution (l'ensemble de ses vecteurs réalisables peut être non borné, ainsi que la fonction économique qui prend ses valeurs sur cet ensemble). Voici deux exemples simples. Soit x_1 un nombre (un vecteur de dimension 1). Le problème

$$\max x_1$$
$$x_1 \leqslant -1, \quad x_1 \geqslant 0$$

n'a pas de sens. Le problème

$$\max x_1$$
$$x_1 \geqslant 0$$

a un sens mais n'est pas possible.

§ 4. Résolution numérique des problèmes de programmation linéaire

L'étude des problèmes de programmation linéaire débute tout naturellement par la tentative de les résoudre à l'aide de l'appareil classique de l'Analyse mathématique et de l'Algèbre supérieure. Prenons un cas très simple où l'on demande le maximum sur un segment d'une fonction dérivable. Soit $f(x)$ une fonction d'une variable définie sur le segment $[a, b]$. On demande son maximum sur $[a, b]$. L'Analyse mathématique propose l'algorithme suivant: calculer la dérivée $f'(x)$; trouver toutes les solutions $x^1, x^2, \ldots, x^k$ de l'équation $f'(x) = 0$; calculer les valeurs $f(x^1), f(x^2), \ldots$ $\ldots, f(x^k), f(a), f(b)$ et choisir la valeur la plus grande. On voit

de suite que même dans ce cas simple on n'échappe pas aux difficultés. Comment résoudre l'équation $f'(x) = 0$? et ne serait-ce pas une procédure aussi laborieuse que le problème de maximum posé? Comment procéder dans le cas où il y a beaucoup (voire une infinité) de points stationnaires $x^1, x^2, \ldots, x^k$? Comment réaliser leur exploration successive et l'identification des $f(x^i)$?

La situation se complique si la fonction dépend de plusieurs variables. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur n-dimensionnel, X un sous-ensemble fermé de l'espace $\mathbf{R}^n$ de dimension n et $f(x)$ une fonction de n variables définie sur X. On demande le maximum que la fonction dérivable $f(x)$ atteint sur l'ensemble X. Voyons ce que l'Analyse mathématique nous offre en l'occurrence. Prenons l'ensemble de points $x(\theta)$ de l'espace de dimension n dont les coordonnées sont

$$x_1(\theta) = x_1^0 + \theta s_1,\ x_2(\theta) = x_2^0 + \theta s_2, \ldots$$
$$\ldots, x_n(\theta) = x_n^0 + \theta s_n,\ \theta \geqslant 0.$$

Géométriquement, l'ensemble en question est une demi-droite issue du point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ dont la direction est celle du vecteur $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. On suppose que $s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = 1$.

On fixe la direction $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ et on augmente le nombre θ à partir de 0. On établit la variation de la fonction $f(x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots, x_n(\theta))$. Le comportement local de $f(x)$ le long de s est défini par la dérivée par rapport à θ au point $\theta = 0$ (on rappelle que $\theta = 0$ correspond à $x(0) = x^0$). La dérivée est calculée par la règle de dérivation d'une fonction composée:

$$f'_\theta(x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots, x_n(\theta)) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'(\theta) + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2'(\theta) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'(\theta) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} s_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} s_n.$$

La quantité

$$f_s(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) s_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) s_n$$

est la *dérivée de la fonction* $f(x)$ au point x^0 *dans la direction* $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)$ s'appelle le *gradient de* $f(x)$ au point x^0 et il est noté $\operatorname{grad} f(x^0)$. Ainsi, $f_s(x^0) = \langle \operatorname{grad} f(x^0), s \rangle$.

Si l'on s'interroge sur la direction s le long de laquelle $f(x)$ croît le plus vite au voisinage de x^0, on utilise les propriétés fondamentales du produit scalaire pour montrer que cette augmentation n'a lieu que si $s = \operatorname{grad} f(x^0)$.

Ainsi, un résultat capital de l'Analyse mathématique s'énonce dans ce cas en termes suivants: la valeur de la fonction $f(x) =$

$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au voisinage du point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ croît le plus rapidement si l'on prend pour vecteur direction $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ le gradient de $f(x)$ au point x^0. Si $f(x)$ atteint en x^0 un maximum local, aucune direction d'augmentation de $f(x)$ ne passe par ce point. Une condition nécessaire de maximum de $f(x)$ en un point x^0 *intérieur* à X est donc l'égalité de grad $f(x^0)$ et du vecteur nul. On a insisté sur le mot « intérieur » car les développements ci-dessus ne sont en vigueur que si l'on se déplace (ne fût-ce qu'un peu) à partir de x^0 le long de toute direction tout en restant dans X.

Finalement, on dit que le problème de recherche du maximum de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble X consiste à trouver toutes les solutions $x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$, $p = 1, 2, \ldots, k$, du système d'équations $\partial f(x)/\partial x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, à calculer les valeurs $f(x^1), f(x^2), \ldots, f(x^n)$ et *toutes les valeurs de* $f(x)$ *sur la frontière de* X et à en sélectionner la valeur maximale.

Le cas des fonctions de plusieurs variables est manifestement plus délicat; même si l'on arrive facilement à résoudre le système grad $f(x) = 0$ et à trouver les points de maximum local de $f(x)$ à l'intérieur de l'ensemble X, il faut calculer les valeurs de la fonction en tous les points frontières comme en dimension un. Or, la frontière de X appartenant à un espace n-dimensionnel comporte toujours pour $n > 1$ (à l'exception des cas triviaux) une infinité de points. L'Analyse classique ne donne en l'occurrence pas de recette universelle; chaque cas doit être traité à part. Si X est défini par un système d'équations, on cherche l'extrémum par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, mais les difficultés de la résolution numérique persistent. S'agissant des problèmes de programmation linéaire, la situation se complique du fait que certaines contraintes donnant l'ensemble admissible peuvent être du type inéquation.

Prenons le problème sous forme standard et appelons X l'ensemble des vecteurs réalisables. Le gradient de la fonction économique est égal à $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. C'est une constante indépendante du point du calcul. Si c_i ne sont pas simultanément nuls (sinon le problème d'optimum ne se pose pas), alors la fonction $\langle c, x\rangle$ n'atteint donc pas de maximum local, si bien qu'elle réalise son maximum sur la frontière de X. On note qu'on n'a pas explicité la frontière de X. Ainsi, la difficulté majeure de la résolution numérique d'un programme linéaire consiste à définir la frontière de l'ensemble X et à calculer les valeurs de $\langle c, x\rangle$ en ses points (qui sont une infinité) pour ensuite trouver parmi celles-ci le programme optimal.

CHAPITRE II

POLYÈDRE CONVEXE ET INÉQUATIONS LINÉAIRES

§ 1. Interprétation géométrique des problèmes de programmation linéaire

Soit le programme linéaire simple

$$\max (x_1 + x_2)$$
$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 15, \quad -x_1 + x_2 \leqslant 2, \quad 10x_1 + 7x_2 \leqslant 35,$$
$$-x_1 - x_2 \leqslant -1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Il est connu en Géométrie analytique que l'équation $ax_1 + bx_2 = c$ définit une droite du plan x_1Ox_2 (si a et b ne sont pas simultanément nuls), et le plan est partagé en deux demi-plans. Si deux points (x_1', x_2') et (x_1'', x_2'') de x_1Ox_2 n'appartiennent pas à la droite, la position relative de ces points et de la droite est donnée par les quantités $ax_1' + bx_2' - c$ et $ax_1'' + bx_2'' - c$ (si ces quantités sont de même signe, les points se trouvent d'un seul côté de la droite, et si elles sont de signes différents, les points sont de part et d'autre de la droite). L'inéquation $ax_1 + bx_2 \leqslant c$ décrit donc l'ensemble de points (x_1, x_2) qui remplissent le demi-plan limité par la droite $ax_1 + bx_2 = c$, y compris celle-ci.

Avec ces considérations, on représente dans le plan de coordonnées l'ensemble de points vérifiant toutes les contraintes de notre exemple. Ainsi, l'inéquation $3x_1 + 5x_2 \leqslant 15$ étant vérifiée par le point (0, 0) définit la portion de demi-plan munie de l'origine des coordonnées. On voit sur la fig. 2.1 l'ensemble ombré des points réalisables, i.e. des points du plan dont les coordonnées satisfont à toutes les inéquations du problème considéré.

Voyons ce qu'il en est de la fonction économique $x_1 + x_2$. Soit la droite $x_1 + x_2 = 5$ (en pointillé sur la figure 2.1). Sa courbe représentative ne coupe pas l'ensemble admissible, i.e. aucun point réalisable (x_1, x_2) ne confère à la fonction économique la valeur 5.

L'équation $x_1 + x_2 = d$ décrit pour différents d une famille de droites parallèles, si bien que le problème posé de la programmation linéaire s'énonce comme suit: trouver une valeur maximale de d telle que $x_1 + x_2 = d$ traverse l'ensemble admissible. Il est clair que si l'on déplace cette droite parallèlement à elle-même de façon à s'approcher de l'ensemble admissible, elle rencontre en premier lieu le point réalisable A de coordonnées (70/29, 45/29) qui est l'intersection des droites $10x_1 + 7x_2 = 35$ et $3x_1 + 5x_2 = 15$.

Cet exemple met en relief toutes les particularités essentielles des problèmes de programmation linéaire. En effet, l'ensemble admissible est ici un polyèdre convexe intersection de demi-plans, et c'est en l'un de ses sommets (un point extrême) que la fonction économique atteint son maximum.

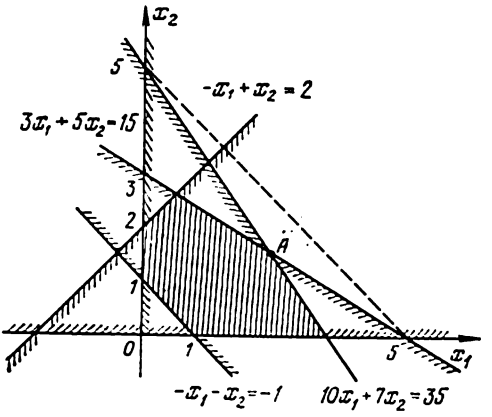


Fig. 2.1.

Il est clair que ce n'est pas par hasard que le point d'intersection des droites $10x_1 + 7x_2 = 35$ et $3x_1 + 5x_2 = 15$ est la solution du problème; si l'on mène par A une droite de la famille $x_1 + x_2 = d$, elle se situe entre deux droites précédentes.

Ce résultat peut s'énoncer d'une autre manière. On rappelle que le vecteur de la normale à la droite $ax_1 + bx_2 = c$ est le vecteur de coordonnées (a, b). La fig. 2.2 représente, dans le plan de coordonnées, les vecteurs des normales à toutes les droites de notre exemple (les normales sont numérotées dans l'ordre de succession des contraintes du problème). Les normales $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ correspondent à $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$ respectivement. La flèche en pointillé représente le vecteur $(1, 1)$ de la normale à la fonction économique.

Le vecteur $(1, 1)$ est situé entre les normales (1) et (3) aux droites dont l'intersection constitue justement le point cherché.

Il se peut que, contrairement au cas considéré, le problème de programmation linéaire admette une infinité de solutions. Voici un problème qui illustre ce cas:

$$\max\,(8x_1 + 9x_2)$$

$$3x_1 + 6x_2 \leqslant 18, \quad 7x_1 + 4x_2 \leqslant 28, \quad 8x_1 + 9x_2 \leqslant 36,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Tout point du segment limité par (18/7, 12/7) et (108/31, 28/31) peut être un programme optimal, ainsi que deux derniers points, sommets du polyèdre admissible (fig. 2.3).

Ainsi, la recherche des solutions de ces problèmes simples de la programmation linéaire s'avère assez élémentaire; on décrit de quelque façon le polyèdre des points réalisables, on trouve ses sommets et on en sélectionne ceux qui maximisent la fonction économique. On ne saurait oublier non plus la liaison intuitive entre la

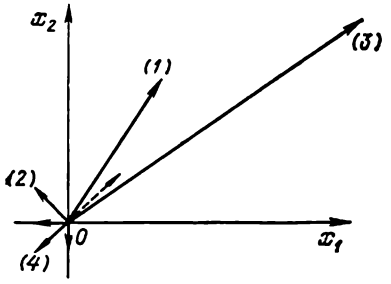


Fig. 2.2.

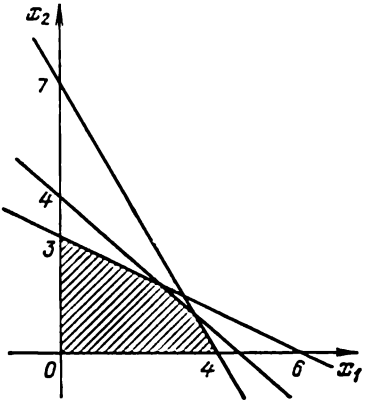


Fig. 2.3.

normale à la forme linéaire donnant la fonction économique et les normales aux droites dont l'intersection constitue un programme optimal.

Les idées du procédé restent les mêmes dans le cas des contraintes nombreuses et de l'espace défini par plusieurs variables encore que la structure de l'ensemble admissible perde beaucoup de son caractère intuitif et les calculs se compliquent singulièrement. C'est le lien entre les normales définies par les contraintes et la normale à la fonction économique qui joue en l'occurrence un rôle tout spécial. Les résultats remarquables obtenus dans cette voie constituent la théorie de la dualité.

§ 2. Ensembles convexes et théorèmes de séparation

1. On va formuler et démontrer des résultats importants relatifs à un ensemble convexe quelconque qui nous permettront dans la suite d'étudier les problèmes de programmation linéaire.

Soit $\mathbf{R}^n$ un espace euclidien n-dimensionnel. On introduit les notations mathématiques usuelles: $x \in X$ — x est élément de l'ensemble X; $X_1 \subseteq X_2$ — X_1 est contenu dans X_2; $X = \{x \mid x$ vérifie

la propriété $S\}$ — X contient tous les éléments jouissant de la propriété S, et ces éléments seulement; $x \geqslant y$ — toute coordonnée du vecteur y est inférieure ou égale à son homologue du vecteur x; $x \geqslant 0$ — le vecteur x a toutes ses coordonnées non négatives; $x > 0$ — toutes les coordonnées du vecteur x sont positives; x_i — i-ième coordonnée du vecteur x. Nous ne ferons pas de distinction entre un point et un vecteur des espaces n-dimensionnels.

Définition 2.1. Un ensemble X est *convexe* si, chaque fois qu'il contient deux points x^1, x^2 quelconques, il contient également tous les points de la forme

$$x = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{2.1}$$

Quelle est la signification géométrique de la notion d'ensemble convexe? On rappelle la façon dont on définit le segment $[x^1, x^2]$, x^1, x^2 étant deux points de l'espace $\mathbf{R}^n$.

La droite passant par les points x^1, x^2 a pour équation paramétrique

$$x(\alpha) = x^2 + (x^1 - x^2)\alpha, \tag{2.2}$$

$x^1 - x^2$ étant son *vecteur directeur*. Lorsque $\alpha = 0$, on a $x(0) = x^2$, et si $\alpha = 1$, il vient $x(1) = x^1$. Quand α varie entre 0 et 1 ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), le point $x(\alpha)$ parcourt tout le segment compris entre x^1 et x^2.

On regroupe les termes de (2.2) et on a $x(\alpha) = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$. Ainsi, tout point de la forme (2.1) est sur le segment limité par x^1, x^2, et, inversement, tout point de ce segment admet la représentation (2.1). Par conséquent, un ensemble convexe peut être défini en termes géométriques.

Définition 2.2. Un ensemble X est *convexe* si, chaque fois qu'il contient deux points x^1, x^2 quelconques, il contient également le segment dont ils sont les extrémités.

Ci-dessous quelques exemples d'ensembles convexes dans le plan.

Rectangle $X = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant a,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant b\}$ (fig. 2.4). On montre que X est convexe. Soient (x_1, x_2), (x_1', x_2') deux points du rectangle X, α un nombre arbitraire tel que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Démontrer que le point de coordonnées $(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_1', \alpha x_2 + (1 - \alpha) x_2')$ appartient à X. En d'autres termes, il faut tester les inégalités $0 \leqslant \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_1' \leqslant a$, $0 \leqslant \alpha x_2 + (1 - \alpha) x_2' \leqslant b$. Comme $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_1' \leqslant a$, on les multiplie par les nombres non négatifs α et $1 - \alpha$ respectivement et on fait la somme, il vient

$$0 \leqslant \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_1' \leqslant \alpha a + (1 - \alpha) a = a.$$

On procède de même en ce qui concerne l'autre inégalité.

DISQUE $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2\}$ (fig. 2.5). Démontrer la convexité de X. Soit $(x_1, x_2) \in X$, $(x_1', x_2') \in X$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Voyons si $(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_1', \alpha x_2 + (1-\alpha) x_2')$ est élément de X. On effectue les transformations simples suivantes: $(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_1')^2 + (\alpha x_2 + (1-\alpha) x_2')^2 = \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2) + 2\alpha (1-\alpha)(x_1 x_1' + x_2 x_2') + (1-\alpha)^2 ((x_1')^2 + (x_2')^2)$ et on utilise l'inégalité fondamentale du produit scalaire (inégalité de Cauchy-Bouniakovski) $x_1 x_1' + x_2 x_2' \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}$. On substitue R^2 à $x_1^2 + x_2^2$ et $(x_1')^2 +$

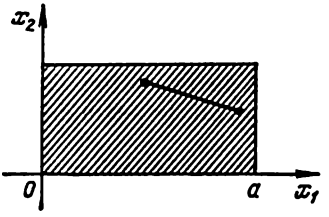


Fig. 2.4.

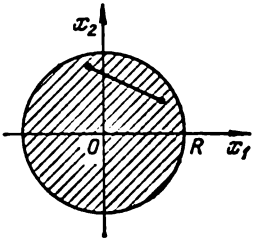


Fig. 2.5.

$+ (x_2')^2$ de toutes les expressions ci-dessus (ce qui renforce l'inégalité), il vient

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_1')^2 + (\alpha x_2 + (1-\alpha) x_2')^2 \leqslant$$
$$\leqslant R^2 [\alpha^2 + 2\alpha (1-\alpha) + (1-\alpha)^2] = R^2 (\alpha + (1-\alpha))^2 = R^2,$$

i.e. le disque est un ensemble convexe.

La propriété simple suivante des ensembles convexes joue un rôle important dans la suite du livre.

THÉORÈME 2.1. *L'intersection d'ensembles convexes est convexe.*

DÉMONSTRATION. Soit $X = X_1 \cap X_2$, avec X_1, X_2 des ensembles convexes, et soient x et x' deux points quelconques de X. Comme $X \subseteq X_1$, on a $x, x' \in X_1$. L'ensemble X_1 étant convexe, il en résulte que le segment $[x, x']$ tout entier est dans X_1. De même, $[x, x'] \subseteq X_2$. Ainsi, $[x, x'] \subseteq X_1 \cap X_2 = X$.

DÉFINITION 2.3. On appelle *somme* de deux ensembles $X_1 \in \mathbf{R}^n$, $X_2 \in \mathbf{R}^n$ l'ensemble $X = \{x \mid x = x^1 + x^2, x^1 \in X_1, x^2 \in X_2\}$ obtenu par addition deux à deux des éléments de X_1 et X_2.

THÉORÈME 2.2. *La somme d'ensembles convexes est convexe.*

DÉMONSTRATION. Soit $x, \bar{x} \in X$, où $X = X_1 + X_2$. Il existe dans X_1 et X_2 des éléments tels que $x = x^1 + x^2$, $\bar{x} = \bar{x}^1 + \bar{x}^2$, $x^1, \bar{x}^1 \in X_1$, $x^2, \bar{x}^2 \in X_2$. Etant donné un nombre arbitraire α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, on a $\alpha x^1 + (1-\alpha) \bar{x}^1 \in X_1$, $\alpha x^2 + (1-\alpha) \bar{x}^2 \in X_2$. De la défini-

tion de X, il résulte que la somme de ces éléments est dans X:

$$\alpha x^1 + (1-\alpha)\,\bar{x}^1 + \alpha x^2 + (1-\alpha)\,\bar{x}^2 = \\ = \alpha\,(x^1 + x^2) + (1-\alpha)\,(\bar{x}^1 + \bar{x}^2) = \\ = \alpha x + (1-\alpha)\,\bar{x} \in X.$$

Un ensemble convexe dans l'espace $\mathbf{R}^n$ est par exemple tout sous-espace vectoriel L qui contient, par définition, n'importe quelle combinaison linéaire de ses éléments.

2. Les ensembles convexes sont essentiellement caractérisés par la propriété de séparation. Soit, dans le plan, un convexe fermé X

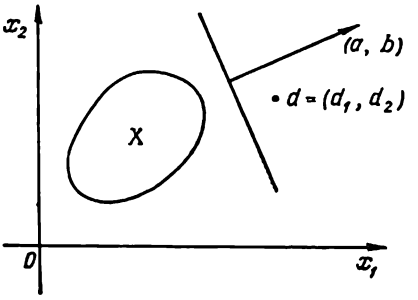


Fig. 2.6.

et un point $d \notin X$ (fig. 2.6). Il existe une droite $ax_1 + bx_2 = c$ telle que X et $d = (d_1, d_2)$ soient de part et d'autre de la droite, i.e. tout point $(x_1, x_2) \in X$ vérifie $ax_1 + bx_2 \leqslant c$, mais $ad_1 + bd_2 > c$.

S'agissant d'un ensemble convexe dans l'espace n-dimensionnel, on énonce et démontre cette propriété moyennant une notion analogue à la notion d'une droite dans le plan.

Définition 2.4. Un ensemble de points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de coordonnées telles que

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = c \qquad (\langle p, x\rangle = c)$$

s'appelle *hyperplan* de $\mathbf{R}^n$.

Le vecteur $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ est la *normale* à cet hyperplan (on suppose que $p \neq 0$).

Théorème 2.3. (de séparation). *Soit X un ensemble convexe fermé, $a \notin X$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Il existe un hyperplan de normale $p \neq 0$ tel que $\langle p, a\rangle > c$ et on ait $\langle p, x\rangle \leqslant c$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Soit la fonction

$$\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2$$

de la variable indépendante $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sur l'ensemble X. Elle est évidemment continue. Aux termes d'un théorème de Weierstrass, une fonction continue sur un ensemble fermé borné atteint sur cet ensemble sa borne inférieure. Pour qu'on puisse utiliser ce résultat, on considère un point $\bar{x}$ quelconque de X et une boule U de centre a et de rayon dont le carré vaut $\varphi(\bar{x})$ (fig. 2.7).

L'intersection $\tilde{X} = U \cap X$ est un ensemble fermé et borné. La fonction $\varphi(x)$ atteint donc son minimum en un point $b \in \tilde{X}$. Il est clair que b réalise le minimum de $\varphi(x)$ sur X tout entier.

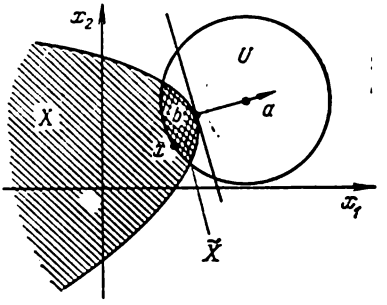


Fig. 2.7.

Ainsi, $\varphi(x) \geqslant \varphi(b)$ quel que soit $x \in X$. On fixe un point quelconque $x \in X$ et on examine le segment

$$x(\alpha) = \alpha x + (1 - \alpha) b, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

L'ensemble X étant convexe, on a $x(\alpha) \in X$ pour tout α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, donc $\varphi(x(\alpha)) \geqslant \varphi(b)$. Par conséquent, $\frac{\varphi(x(\alpha)) - \varphi(b)}{\alpha} \geqslant 0$ pour tout α, $0 < \alpha \leqslant 1$. La fonction $\varphi(x(\alpha))$ est dérivable par rapport à α en tant que superposition de deux fonctions dérivables $\varphi(x)$ et $x(\alpha)$. Aussi il existe la limite

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(x(\alpha)) - \varphi(b)}{\alpha} = \varphi'_\alpha(x(0)) \geqslant 0.$$

On calcule directement la dérivée $\varphi'_\alpha(x(0))$ à l'aide de la règle de dérivation d'une fonction composée:

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha)) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - a_i)^2\right)' = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - a_i)\, x'_i(\alpha).$$

Puisque $x_i'(\alpha) = (\alpha x_i + (1-\alpha) b_i)' = x_i - b_i$ et $x_i(0) = b_i$, on a

$$\varphi_\alpha'(x(\alpha)) = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - a_i)(x_i - b_i),$$

$$\varphi_\alpha'(x(0)) = 2\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(x_i - b_i).$$

D'après les résultats démontrés ci-dessus, cette dérivée est non négative, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(x_i - b_i) \geqslant 0.$$

On introduit les notations $p_i = a_i - b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $c = \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i - b_i)$ et on récrit l'inégalité obtenue:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant c \quad (\langle p, x\rangle \leqslant c).$$

On note que le vecteur $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et le nombre c sont indépendants du vecteur choisi x de X. Aussi il faut vérifier que $p \neq 0$ et $\langle p, a\rangle > c$ pour constater que toutes les affirmations du théorème sont justes pour p et c. En effet, $p = a - b$ et $p \neq 0$ car dans le cas contraire $a = b$, ce qui est impossible puisque $b \in X$, $a \notin X$. Enfin,

$$\langle p, a\rangle - c = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 > 0,$$

donc $\langle p, a\rangle > c$, ce qui démontre le théorème.

Il y a lieu de dire que l'hyperplan $\langle p, x\rangle = c$ construit lors de la démonstration du théorème présente la propriété de rencontrer l'ensemble X au point b: on vérifie aisément l'égalité $\langle p, b\rangle = c$. On introduit donc la

Définition 2.5. On dit que l'hyperplan $\langle p, x\rangle = c$ est un hyperplan *d'appui* à l'ensemble X en un point $b \in X$ si l'on a pour tout élément $x \in X$ les relations $\langle p, x\rangle \leqslant c$ et $\langle p, b\rangle = c$.

Ainsi, le théorème de séparation dit que l'ensemble convexe fermé X est séparé de tout point $a \notin X$ par un hyperplan d'appui.

Si le convexe X n'est pas fermé et si $a \notin X$ et $a \in \bar{X}$, $\bar{X}$ étant la fermeture de X, le théorème de séparation est en défaut. Il suffit cependant de corriger un peu l'énoncé, à savoir on exige $\langle p, a\rangle \geqslant c$ au lieu de $\langle p, a\rangle > c$. Cela découle du résultat auxiliaire suivant: la fermeture d'un ensemble convexe est convexe. En effet, soient $x, \bar{x} \in \bar{X}$, et $x = \lim_{k\to\infty} x^k$, $x^k \in X$, $\bar{x} = \lim_{k\to\infty} \bar{x}^k$, $\bar{x}^k \in X$. Vu la conve-

xité de X, on a $\alpha x^k + (1-\alpha)\bar{x}^k \in X$, et il existe la limite

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha x^k + (1-\alpha)\bar{x}^k) = \alpha x + (1-\alpha)\bar{x}$$

qui appartient à $\bar{X}$ du moment que $\bar{X}$ est un fermé.

Soit $a \notin X$, on démontre aisément qu'il existe alors une suite a^k, $k = 1, 2, \ldots$, $a^k \notin \bar{X}$, $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = a$. On applique le théorème de séparation à $\bar{X}$ et à a^k et on obtient l'hyperplan $\langle p^k, x\rangle = \langle p^k, b^k\rangle$. Prenons l'hyperplan parallèle passant par a^k: $\langle p^k, x\rangle = \langle p^k, a^k\rangle$. On estime sans restreindre la généralité que $\| p^k \| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, et que la suite des vecteurs p^k converge vers un $p \neq 0$. On a pour tout k et tout $x \in X$ l'inégalité $\langle p^k, x\rangle \leqslant \langle p^k, a^k\rangle$ car $\langle p^k, b^k\rangle \leqslant \langle p^k, a^k\rangle$. On passe à la limite pour $k \to \infty$, il vient $\langle p, x\rangle \leqslant \langle p, a\rangle$ pour tout $x \in \bar{X}$, en particulier, pour $x \in X$.

On a donc le théorème de séparation pour les ensembles convexes non fermés.

THEOREME 2.4. *Soit X un ensemble convexe (non nécessairement fermé). On suppose que a n'est pas un point intérieur de X. Il existe un hyperplan $\langle p, x\rangle = c$, $p \neq 0$, tel que $\langle p, a\rangle = c$ et $\langle p, x\rangle \leqslant c$ pour tout $x \in X$.*

On demande souvent que l'hyperplan sépare deux ensembles convexes. Le théorème ci-dessous en affirme la possibilité.

On dit que l'ensemble $\mathbf{R}^n_+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n,\ x \geqslant 0\}$ des vecteurs $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de coordonnées non négatives: $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est l'*orthant positif* de l'espace $\mathbf{R}^n$.

THEOREME 2.5. *Soit X un ensemble convexe qui ne contient pas de points intérieurs de l'orthant positif $\mathbf{R}^n_+$ (i.e. aucun point de X n'a toutes ses coordonnées positives). Il existe un hyperplan $\langle p, x\rangle = 0$ de normale $p \geqslant 0$, $p \neq 0$, tel que $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in X$.*

DÉMONSTRATION. Soit l'ensemble $M = X - \mathbf{R}^n_+$. Il est clair que 0 n'est pas un point intérieur à M. En effet, il existe dans le cas contraire un voisinage (une boule) de l'origine des coordonnées, qui appartient à M. Ce voisinage contient un point u dont toutes les coordonnées sont positives: $u > 0$. Comme $u \in M$, on a $u = x - v$, où $x \in X$, $v \in \mathbf{R}^n_+$, auquel cas $x = u + v > 0$: contradiction avec l'hypothèse du théorème.

Le résultat 2.4 aidant, on peut affirmer qu'il existe un hyperplan $\langle p, x\rangle = 0$, $p \neq 0$, passant par l'origine tel que tout point $u \in M$ vérifie l'inégalité $\langle p, u\rangle \leqslant 0$. On en conclut moyennant la définition de M que tout $x \in X$ et $v \in \mathbf{R}^n_+$ satisfont à $\langle p, x\rangle \leqslant \langle p, v\rangle$. On pose $v = 0$, il vient $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ quel que soit $x \in X$.

On fixe un point $x \in X$ et on a $\langle p, v\rangle \geqslant \langle p, x\rangle$ pour tout $v \in \mathbf{R}^n_+$. D'où évidemment $p \geqslant 0$. En effet, si $p_i < 0$ et si l'on choisit pour v un point de la forme $(0, 0, \ldots, 0, \lambda, 0, \ldots, 0)$, avec $\lambda > 0$ à la place i, on obtient $\lambda p_i \geqslant \langle p, x\rangle$. Or, on peut rendre λp_i négatif aussi petit qu'on veut, inférieur en tous cas à $\langle p, x\rangle$ fixé.

3. Le cas où la normale p du théorème 2.5 peut être prise positive présente souvent un certain intérêt. On pourrait penser qu'une condition suffisante en est que l'intersection $X \cap \mathbf{R}^n_+$ soit, ou bien vide, ou bien réduite au vecteur nul. La fig. 2.9 montre cependant la fausseté de cette hypothèse.

Il existe une classe très importante d'ensembles convexes qui permet de préciser l'énoncé 2.5.

Définition 2.6. Un ensemble $K \subseteq \mathbf{R}^n$ s'appelle *cône convexe* si, toutes les fois qu'il contient des points x', x'' quelconques, il contient tous les points de la forme $x = \alpha x' + \beta x''$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

Il en résulte de suite que, premièrement, le cône convexe K est un ensemble convexe (voir déf. 2.1) et, deuxièmement, si K contient le vecteur x, il contient également la demi-droite αx, $\alpha \geqslant 0$. Evidemment, tout cône convexe K renferme l'origine des coordonnées.

Théorème 2.6. *Tout hyperplan d'appui à un cône convexe K passe par l'origine des coordonnées.*

Démonstration. Supposons que l'hyperplan $\langle p, x\rangle = c$ est d'appui à K en un point $b \in K$: quel que soit $x \in K$, $\langle p, x\rangle \leqslant c$, $\langle p, b\rangle = c$. Prenons un point αb, où $\alpha \geqslant 0$. On a $\alpha b \in K$ par définition d'un cône, donc $\langle p, \alpha b\rangle \leqslant c$. Comme $\langle p, \alpha b\rangle = \alpha \langle p, b\rangle = \alpha c$, l'inégalité $\alpha c \leqslant c$ a lieu pour tout $\alpha \geqslant 0$. D'où $(\alpha - 1)\, c \leqslant 0$. On a $c \geqslant 0$ et $c \leqslant 0$ pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$ respectivement. Ainsi $c = 0$, l'équation de l'hyperplan d'appui s'écrit $\langle p, x\rangle = 0$ et le point 0 est dans cet hyperplan, c.q.f.d.

La notion de cône convexe joue un rôle absolument exceptionnel dans les problèmes de programmation linéaire. Cette classe particulière d'ensembles convexes présente plusieurs caractères spécifiques.

Voyons trois exemples représentés par les fig. 2.8 à 2.10. Dans le premier cas, K est un cône convexe sans point commun avec l'intérieur de $\mathbf{R}^2_+$. Le théorème 2.5 entraîne que K et $\mathbf{R}^2_+$ peuvent être séparés par un hyperplan dont la normale a plusieurs coordonnées non négatives. En outre, on peut choisir l'hyperplan séparant de façon que sa normale soit un vecteur positif (voir la fig.).

Plaçons-nous dans le cas 2.9. L'ensemble convexe X est un disque de rayon unité et de centre $(-1, 0)$. Le seul hyperplan qui sépare X et $\mathbf{R}^2_+$ possède la normale $(1,0)$, si bien que l'hyperplan séparant de normale positive n'existe pas.

Le cône convexe de la fig. 2.10 est le demi-plan de gauche qui contient le point 0 sans contenir les autres points de l'axe $0x_2$. De même que K de la fig. 2.8, ce cône ne renferme aucun point de l'orthant non négatif $\mathbf{R}^2_+$ à part le point 0. Mais il est impossible de le séparer de $\mathbf{R}^2_+$ par l'hyperplan de normale positive. Le fait est qu'il n'est pas fermé.

L'étude des propriétés des cônes convexes utilise la

DÉFINITION 2.7. Soit K un cône convexe. L'ensemble

$$K^* = \{p \mid p \in \mathbf{R}^n,\ \langle p, x\rangle \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in K\}$$

s'appelle *cône convexe dual de* K.

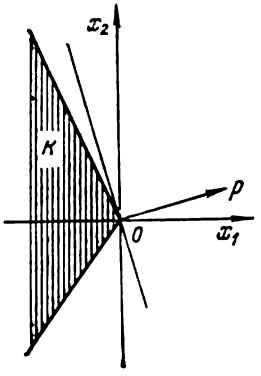


Fig. 2.8.

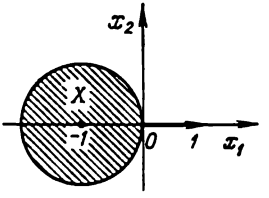


Fig. 2.9.

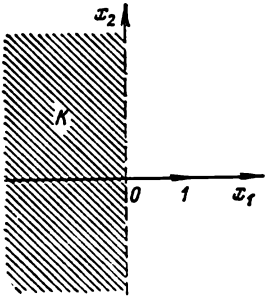


Fig. 2.10.

On illustre cette notion par les fig. 2.11 et 2.12, où les droites en pointillé représentent les générateurs des cônes K^* duals des cônes K (secteurs ombrés). En d'autres termes, le cône K^* est formé de vecteurs p, chaque p faisant un angle non aigu avec tout vecteur de K. Aussi les générateurs des K^* des figures sont les demi-droites perpendiculaires aux générateurs de K. On laisse au lecteur le soin de démontrer la convexité de K^* (voir exer. 12).

THÉORÈME 2.7. *K^* est un cône fermé.*

DÉMONSTRATION. On suppose que les vecteurs de la suite $p^1, p^2, \ldots$ $\ldots, p^k, \ldots$ appartiennent à K^* et que la suite converge vers $\lim_{k\to\infty} p^k = p$. On montre que $p \in K^*$, i.e. $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ pour tout vecteur $x \in K$.

On a $\langle p^k, x\rangle \leqslant 0$ parce que $p^k \in K^*$. On passe à la limite pour $k \to \infty$ et on utilise la propriété de continuité du produit scalaire (de la fonction linéaire dans notre cas), il vient $\langle p, x\rangle \leqslant 0$.

On peut associer à K^* un cône dual $(K^*)^*$ noté $K^{**} = (K^*)^*$.

Ci-dessous un résultat géométriquement évident qui est d'une importance capitale.

THÉORÈME 2.8 (THÉORÈME DE DUALITÉ POUR LES CÔNES CONVEXES).
1) $K^{**} \supseteq K$;
2) *si K est un cône convexe fermé, alors* $K^{**} = K$.

DÉMONSTRATION. 1) De la définition de K^*, il résulte que $\langle x, p\rangle \leqslant 0$ pour tout point $x \in K$ et $p \in K^*$. Donc, $x \in K^{**}$, i.e. $K \subseteq K^{**}$.

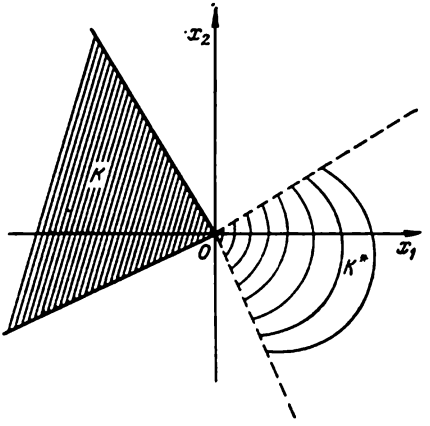


Fig. 2.11.

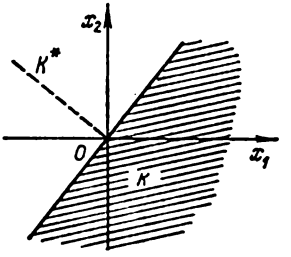


Fig. 2.12.

2) L'inclusion $K \subseteq K^{**}$ étant démontrée, il reste à vérifier $K \supseteq K^{**}$ pour K fermé. On admet que $a \notin K$. Si $a \notin K^{**}$, le théorème se trouve démontré. On applique au cône fermé K et au point $a \notin K$ le théorème de séparation et le résultat 2.6 (tout hyperplan d'appui à un cône passe par l'origine des coordonnées). Soit p le vecteur de la normale à l'hyperplan qui sépare K et a, auquel cas $\langle x, p\rangle \leqslant 0$ pour tout point $x \in K$ et $\langle p, a\rangle > 0$. D'où $p \in K^*$, donc $a \notin K^{**}$ parce que le produit scalaire des vecteurs a et $p \in K^*$ est plus grand que 0.

THÉORÈME 2.9. *Si un cône convexe fermé K ne contient pas de vecteur non négatif* $\neq 0$ (i.e. $K \cap \mathbf{R}^n_+ = 0$), *alors K^* contient un vecteur positif* $p > 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que le cône K^* ne contient pas de vecteurs positifs. On recourt alors au théorème 2.5 (il existe un vecteur non négatif $p \geqslant 0$, $p \neq 0$, et $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in K^*$). Cela signifie à la lumière de la définition d'un cône dual que $p \in K^{**}$. K étant fermé, $K = K^{**}$ par le théorème précédent, d'où $p \in K$, ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

On est en mesure de préciser l'énoncé du théorème de séparation 2.5.

THÉORÈME 2.10. *Soit K un cône convexe fermé qui rencontre $\mathbf{R}^n_+$ le long du seul vecteur nul. Il existe un vecteur positif $p > 0$ tel que $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in K$.*

La démonstration est immédiate compte tenu du théorème précédent et de la définition d'un cône dual.

§ 3. Ensembles convexes polyédriques

1. Dans ce paragraphe, on se propose d'analyser une classe spéciale d'ensembles convexes qui correspond géométriquement aux polyèdres.

DÉFINITION 2.8. Soient $x^1, x^2, \ldots, x^k$ des points quelconques de $\mathbf{R}^n$. On appelle *combinaison linéaire convexe* de ces points la somme $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$, avec α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, des nombres non négatifs arbitraires dont la somme est 1 : $\alpha_1 \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

Conformément à la définition 2.1, un ensemble X est dit convexe s'il contient la combinaison linéaire convexe de ses deux points quelconques.

THÉORÈME 2.11. *Soient X un ensemble convexe et $x^1, x^2, \ldots, x^k$ n'importe quels points de X. L'ensemble X contient toute combinaison linéaire convexe de ces points.*

On démontre par récurrence sur le nombre k de points. Si $k = 2$, l'affirmation du théorème coïncide avec la définition d'un ensemble convexe.

Supposons démontré que toute combinaison linéaire convexe de $k - 1$ points de X appartient à X. Soient k points $x^1, x^2, \ldots, x^{k-1}, x^k$ et la combinaison linéaire convexe $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$. Si $\alpha_k = 1$, alors $\alpha_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k - 1$ et $x = x^k \in X$. Admettons que $\alpha_k < 1$, auquel cas $1 - \alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i > 0$. On groupe les termes dans l'expression de x :

$$x = (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x^i + \alpha_k x^k.$$

Les nombres $\alpha_i/(1 - \alpha_k)$, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$, sont non négatifs

et leur somme vaut 1 :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} = \frac{1}{1-\alpha_k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = \frac{1}{1-\alpha_k}(1-\alpha_k) = 1.$$

L'expression $x' = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} x^i$ est donc une combinaison linéaire convexe des points $x^1, x^2, \ldots, x^{k-1}$ de X. Par hypothèse de récurrence, $x' \in X$, auquel cas le point $x = (1-\alpha_k)\, x' + \alpha_k x^k$ est combinaison linéaire convexe de deux points de X, donc $x \in X$.

Définition 2.9. Soit M un ensemble ponctuel (fini ou infini) de $\mathbf{R}^n$. On appelle *enveloppe convexe de* M, et on note C (M), l'ensemble

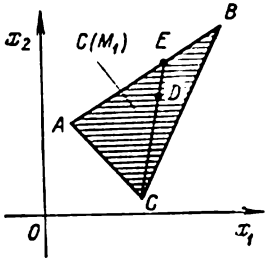


Fig. 2.13.

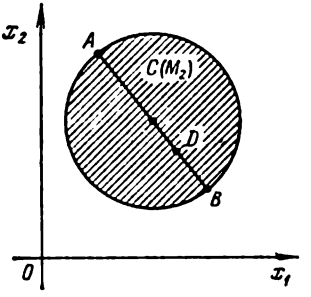


Fig. 2.14.

de toutes les combinaisons linéaires convexes des points de M.

Considérons à titre d'exemples deux ensembles M_1 et M_2 des fig. 2.13 et 2.14. M_1 a pour éléments trois points différents (A, B, C) du plan, et M_2 est une circonférence.

On voit de suite que l'enveloppe convexe de M_1 est le triangle ABC (muni de ses points intérieurs). En effet, soit D un point quelconque du triangle. On mène par D et C une droite. Soit E le point où la droite rencontre le segment $[A, B]$. Le point E est dans ce cas une combinaison linéaire convexe de A et B : $E = \alpha A + (1-\alpha) B$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Le point D est sur le segment $[E, C]$, et on écrit donc $D = \beta E + (1-\beta) C$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. D'où $D = \beta(\alpha A + (1-\alpha) B) + (1-\beta) C = \alpha\beta A + (1-\alpha)\beta B + (1-\beta) C$. Le second membre est combinaison linéaire convexe de A, B, C parce que $\alpha\beta + (1-\alpha)\beta + (1-\beta) = 1$. Tout point du triangle ABC appartient donc à l'enveloppe convexe de l'ensemble M_1.

L'enveloppe convexe de M_2 est le disque limité par M_2. En effet, tout point D du disque s'écrit sous forme de combinaison linéaire convexe des points A et B de la circonférence qui sont les extrémités du diamètre mené par D.

La propriété des enveloppes convexes de M_1 et M_2 de contenir ces points seulement découle du

THÉORÈME 2.12. *L'enveloppe convexe* C (M) *de l'ensemble* M *coïncide avec le plus petit ensemble convexe contenant* M.

La démonstration est évidente car, d'une part, C (M) est un ensemble convexe, et, d'autre part, X étant un convexe contenant M contient toutes les combinaisons linéaires convexes de points de M, i.e. $X \supseteq$ C (M).

Deux exemples ci-dessus montrent que tout point des ensembles C (M_1) et C (M_2) peut être exprimé par les points extrêmes (ce sont A, B, C du premier exemple et les points de la circonférence dans le second).

DÉFINITION 2.10. Un point x d'un ensemble convexe X est dit *extrême* s'il n'admet pas la représentation $x = \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2$, où $x^1 \neq x^2$, $x^1 \in X$, $x^2 \in X$.

On note que tout ensemble convexe ne possède pas de points extrêmes. Ainsi, le demi-plan supérieur fermé est un convexe, a des points frontières (que sont tous les points de la droite définissant le demi-plan), mais il ne possède pas de points extrêmes.

On rappelle qu'un ensemble fermé et borné est *compact*. Les ensembles compacts convexes ont une structure assez simple, à savoir on a le

THÉORÈME 2.13. *Tout ensemble compact convexe de* $\mathbf{R}^n$ *est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes.*

Cela signifie que tout point $x \in X$, X étant un compact convexe, s'écrit sous forme de combinaison convexe d'un nombre fini de points extrêmes de X. On démontre sans peine qu'un compact convexe possède des points extrêmes (voir exer. 6).

Il n'est pas difficile non plus de prouver que tout point x d'un compact convexe X est combinaison linéaire convexe de certains points frontières de X. En effet, soit s un vecteur quelconque dans $\mathbf{R}^n$. Prenons la droite $l(x) = x + \lambda s$, $-\infty < \lambda < \infty$, qui passe par x (pour $\lambda = 0$). X étant un convexe borné, la droite $l(x)$ coupe sa frontière en deux points x^1 et x^2 (peut-être confondus). Dans ce cas, le point $x \in X$ appartient au segment $[x^1, x^2]$ et constitue donc une combinaison linéaire convexe des points frontières x^1, x^2 de X.

Le théorème 2.13 se trouvera démontré si l'on montre que tout point frontière x^0 est combinaison linéaire convexe d'un nombre fini de points extrêmes de X. On démontre cette propriété ayant une interprétation géométrique claire moyennant la notion de dimension d'un ensemble convexe.

On rappelle la définition d'une variété linéaire. On appelle

variété linéaire $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ un ensemble de la forme $Q = x^0 + L$, avec L un sous-espace. L'Algèbre linéaire apprend que si $Q = x' + L'$, L' étant un sous-espace, alors $L = L'$, i.e. il correspond à la variété linéaire Q un seul sous-espace L dont Q est le translaté.

La *dimension d'une variété linéaire* $Q = x^0 + L$ est la dimension du sous-espace L.

La variété linéaire Q de la fig. 2.15 est obtenue par translation du sous-espace L: un point quelconque x de Q s'écrit $x = x^0 + l$, où $l \in L$. Il est clair que le choix de x^0 n'est pas univoque. Dans l'exemple considéré, la dimension de Q est 1.

Comme $\mathbf{R}^n$ est une variété linéaire (de dimension n), $x^0 = 0$, $L = \mathbf{R}^n$, tout ensemble convexe $X \subseteq \mathbf{R}^n$ appartient à une variété linéaire de dimension n.

On appelle *dimension d'un ensemble convexe* $X \in \mathbf{R}^n$ la plus petite dimension des variétés linéaires contenant X. Ainsi, la dimension du segment $[A, B]$ (fig. 2.13) est 1, celle de l'ensemble convexe réduit à A vaut 0, et le triangle ABC a pour dimension 2. Si la dimension d'un ensemble convexe X est k, on dit que $X \subseteq \mathbf{R}^k$; on prend, à cet effet, une variété linéaire Q, $X \subseteq Q$, k-dimensionnelle et, dans $Q = x^0 + L$, un système de coordonnées $x^0 + l_1$, $x^0 + l_2, \ldots, x^0 + l_k$, avec $\{l_1, l_2, \ldots, l_k\}$ une base de L. La variété Q devient un espace vectoriel de dimension k. Ainsi, on choisit comme origine dans Q de la fig. 2.15 le point x^0 et comme base le vecteur l, auquel cas Q devient $\mathbf{R}^1$.

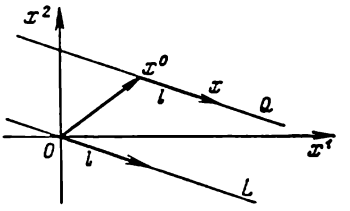


Fig. 2.15.

Voici un autre fait évident relatif à la notion de la dimension des ensembles convexes. Soit un ensemble X de dimension k et $X \subseteq \mathbf{R}^k$. La dimension de l'intersection de X et de tout hyperplan $P = \{x \mid \langle p, x\rangle = d\}$, où $p \in \mathbf{R}^k$, $p \neq 0$, est au plus égale à $k - 1$. En effet, soit $\tilde{L} = \{x \mid \langle p, x\rangle = 0\}$, auquel cas la dimension de $\tilde{L}$ est, on le voit sans peine, $k - 1$. Comme $P \cap X \subseteq x^0 + \tilde{L}$, l'intersection $P \cap X$ est, par définition, au plus $k - 1$-dimensionnelle ($x^0 \in P \cap X$).

Démonstration du théorème 2.13. On opère par récurrence sur la dimension k de X. Si $k = 0$, alors X constitue un point, si bien que l'affirmation du théorème est triviale. Supposons-la vraie pour une dimension inférieure à k, et soit X un ensemble k-dimensionnel. On note a un point frontière quelconque de X (il y a existence parce que X est un compact). Aux termes du théorème 2.4, on trouve un hyperplan $\langle p, x\rangle = \langle p, a\rangle$ tel que $\langle p, x\rangle \leqslant \langle p, a\rangle$ pour tout $x \in X$.

L'intersection X_a de X et de l'hyperplan est un ensemble con-

vexe compact non vide (l'hyperplan étant convexe et contenant le point $a \in X$). L'ensemble X_a a une dimension plus petite que k et représente par hypothèse de récurrence l'enveloppe convexe de ses points extrêmes. Cela étant, tout point extrême c de X_a en est un de X. On procède par l'absurde et on suppose que $c = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $x^1, x^2 \in X$. On a $0 = \langle p, c - a \rangle = \alpha \langle p, x^1 - a \rangle + (1 - \alpha) \langle p, x^2 - a \rangle$, du moment que c est un point de l'hyperplan. Comme $\langle p, x^1 - a \rangle \leqslant 0$, $\langle p, x^2 - a \rangle \leqslant 0$, on a les égalités $\langle p, x^1 - a \rangle = 0$, $\langle p, x^2 - a \rangle = 0$, i.e. $x^1 \in X_a$, $x^2 \in X_a$. Or, c est un point extrême de X_a, donc $x^1 = c$, $x^2 = c$.

Ainsi, tout point frontière a de X est combinaison linéaire convexe des points extrêmes de X, c.q.f.d.

DÉFINITION 2.11. Un ensemble X s'appelle *polyèdre convexe* s'il est l'enveloppe convexe des points en nombre fini.

Autrement dit, un ensemble X est un *polyèdre convexe* s'il contient un nombre fini de points $x^1, x^2, \ldots, x^k$ tels que tout élément x de X s'écrive

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

et que tous les points de cette forme soient dans X.

THÉORÈME 2.14. *Un polyèdre convexe est compact.*

DÉMONSTRATION. Soit X un polyèdre convexe enveloppe convexe de ses points $x^1, x^2, \ldots, x^k$: $X = \mathrm{C}(x^1, x^2, \ldots, x^k)$. On démontre la compacité de X sous la condition suffisante qu'on extraie d'une suite arbitraire $x(m) \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, une suite partielle convergeant vers un $\bar{x} \in X$. On a $x(m) \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, si bien que $x(m) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m) x^i$, $0 \leqslant \alpha_i(m) \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m) = 1$. Chaque suite $\alpha_i(m)$, $m = 1, 2, \ldots$, est bornée ; on en choisit donc une sous-suite convergente. Les suites $\{\alpha_i(m)\}$ étant en nombre fini ($i = 1, 2, \ldots, k$), on peut former une suite partielle de numéros $m_1, m_2, \ldots$ telle que toutes les suites $\alpha_i(m_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, convergent. Soit $\lim_{j \to \infty} \alpha_i(m_j) = \alpha_i \geqslant 0$. Evidemment, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, auquel cas $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_j) x^i$, $j = 1, 2, \ldots$, possède une limite et

$$\bar{x} = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_j) x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \in X,$$

ce qui démontre le théorème.

Deux derniers théorèmes entraînent qu'un polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrêmes. Si $M = C(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble ponctuel $S = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$, on voit clairement que seuls peuvent être des points extrêmes de M les (ou des) points de S.

Les résultats obtenus sont suffisamment intuitifs pour qu'on ait une idée nette de la structure des polyèdres convexes, i.e. des ensembles convexes bornés fermés avec les points extrêmes en nombre fini.

2. On passe à l'examen de l'autre classe importante d'ensembles convexes que sont les cônes polyédriques.

Définition 2.12. Soit $M \subseteq \mathbf{R}^n$ un ensemble quelconque. On appelle *enveloppe conique*, et on note Co (M), l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires non négatives $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$ de points de M.

On montre sans peine que Co (M) est le plus petit cône convexe contenant M (voir exer. 17). Le domaine ombré de la fig. 2.16 est

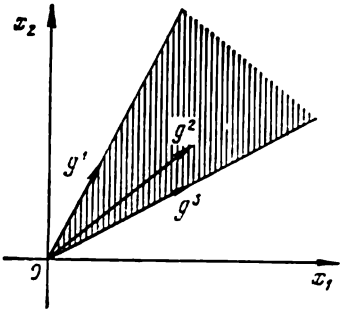


Fig. 2.16.

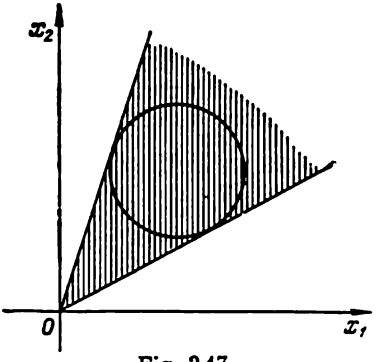


Fig. 2.17.

Co (M), avec M formé de trois vecteurs g^1, g^2, g^3. L'ensemble M de la fig. 2.17 est une circonférence.

Définition 2.13. Un cône convexe K est dit *polyédrique* s'il est l'enveloppe conique d'un nombre fini de ses points.

On comprend intuitivement qu'un cône polyédrique est fermé, mais la démonstration de cette propriété doit être précédée de celle du

Lemme 2.1. *On suppose qu'un vecteur $x \neq 0$ est combinaison linéaire non négative des vecteurs $x^1, x^2, \ldots, x^k$: $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Le vecteur x s'écrit comme combinaison linéaire non*

négative d'un certain nombre de vecteurs linéairement indépendants de l'ensemble $\{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$.

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur k. L'affirmation est triviale pour $k = 1$. Supposons-la vraie pour les nombres plus petits que k. Si au moins l'un des α_i du lemme vaut 0, on applique l'hypothèse de récurrence. On admet donc que $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. On suppose que $x^1, x^2, \ldots, x^k$ sont linéairement dépendants. i.e. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0$, où λ_i sont non tous $=0$. On admet que certains λ_i sont positifs (dans le cas contraire, on les multiplie tous par -1).

Soit $\theta = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} (\lambda_i/\alpha_i)$. Il est clair que $\theta > 0$. Soit $\theta = \lambda_1/\alpha_1$ pour fixer les idées, auquel cas

$$x = x - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i - \frac{1}{\theta} \lambda_i\right) x^i.$$

Les coefficients $\alpha_i - \lambda_i/\theta$ sont non négatifs car $\theta \geqslant \lambda_i/\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, et $\alpha_1 - \lambda_1/\theta = 0$. Par conséquent, le vecteur x est combinaison linéaire non négative de $k - 1$ vecteurs $x^2, x^3, \ldots, x^k$. On l'exprime, par hypothèse de récurrence, par un sous-système libre de ces vecteurs.

THÉOREME 2.15. *Un cône polyédrique convexe est fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $K = \mathrm{Co}\,(x^1, x^2, \ldots, x^k)$. Plaçons-nous dans le cas où le système de vecteurs x^i, $i = 1, 2, \ldots, k$, est linéairement indépendant. Soit L un sous-espace vectoriel k-dimensionnel de $\mathbf{R}^n$ engendré par ces vecteurs. Alors $x^1, x^2, \ldots, x^k$ est une base de L. On enseigne en Algèbre linéaire qu'on munit L d'un produit scalaire de façon que la base donnée soit orthonormée, ce qui permet d'identifier L et $\mathbf{R}^k$, d'une part, et K et $\mathbf{R}^k_+$, de l'autre. Il est évident que $\mathbf{R}^k_+$ est un ensemble fermé, ce qui entraîne la propriété de K d'être fermé pour la norme associée au produit scalaire choisi. On utilise l'équivalence de normes. Soit le cas où l'ensemble de vecteurs $x^1, x^2, \ldots, x^k$ est linéairement dépendant. On considère un sous-système libre quelconque $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_s}$ de cet ensemble et le cône $K_\sigma = \mathrm{Co}\,(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_s})$, avec $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. Comme déjà vu antérieurement, K_σ est fermé. On démontre $K = \bigcup_\sigma K_\sigma$, la réunion étant prise par rapport à tous les jeux σ correspondant aux sous-systèmes libres de vecteurs $x^1, x^2, \ldots, x^k$. En effet, on a évidemment $K \supseteq \bigcup_\sigma K_\sigma$, et l'inclusion inverse découle du lemme 2.1. La propriété, pour la réunion d'ensembles fermés en nombre fini, d'être fermée démontre le théorème.

CONSÉQUENCE. *Tout cône polyédrique convexe K vérifie l'égalité $K = K^{**}$.*

L'affirmation résulte du caractère fermé du cône (on vient de le démontrer) et du théorème de dualité pour les cônes convexes.

Lorsqu'on étudie les cônes convexes, la notion de point extrême si utile pour préciser la structure des polyèdres convexes n'a plus aucune valeur. Ne voit-on pas, en effet, qu'un cône possède un point extrême au plus? On introduit donc un nouvel être mathématique.

DÉFINITION 2.14. Un vecteur $x \neq 0$, $x \in K$, est dit *vecteur extrémal* pour un cône convexe K si $x = 1/2x^1 + 1/2x^2$, avec $x^1, x^2 \in K$, entraîne $x^1 = \lambda x$, $x^2 = \mu x$ pour certains $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$.

Cette définition a une signification claire. Ainsi, g^1, g^3 de la fig. 2.16 sont des exemples de vecteurs extrémaux. Si K est le demi-plan supérieur fermé de $\mathbf{R}^2$: $K = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_2 \geqslant 0\}$, il a pour vecteurs extrémaux (1, 0), (—1, 0).

Si un vecteur $x \in K$ est extrémal, il en est évidemment de même de tout μx, $\mu > 0$. Nous dirons par convention que le vecteur x appartient à la demi-droite extrémale μx, $\mu > 0$. On voudrait certes obtenir pour les cônes polyédriques un analogue du théorème 2.13 relatif aux ensembles convexes compacts et dire qu'un cône polyédrique est l'enveloppe conique de ses vecteurs extrémaux. Mais il existe des cônes polyédriques convexes dépourvus de vecteurs extrémaux. Citons, p. ex., le plan $\mathbf{R}^2$ tout entier ou le cône défini par $x_3 \geqslant 0$ de l'espace $\mathbf{R}^3$. Le dernier cône est polyédrique (il coïncide avec l'enveloppe conique des vecteurs (0, 0, 1), (1, 0, 0), (—1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, —1, 0)) sans posséder aucun vecteur extrémal.

On a néanmoins le résultat évident suivant.

LEMME 2.2. *Soient $K = \mathrm{Co}\,(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ et $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ l'ensemble de tous ses vecteurs extrémaux appartenant à des demi-droites extrémales distinctes. Parmi les vecteurs x^j, $j = 1, 2, \ldots, k$, il y en a nécessairement s appartenant à ces demi-droites.*

Les exemples cités de cônes sans vecteurs extrémaux expliquent la chose; ces cônes contiennent un sous-espace. On formalise ce fait à l'aide de la

DÉFINITION 2.15. Un cône convexe K est dit *pointé* si les relations d'appartenance $x \in K$ et $-x \in K$ impliquent $x = 0$.

Cette définition correspond exactement à l'exigence que K ne renferme aucun sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Les deux cônes des fig. 2.16 et 2.17 sont pointés.

LEMME 2.3. *Soient $x^1, x^2, \ldots, x^k$ des vecteurs non nuls. Si le cône $K = \mathrm{Co}\,(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ est pointé, les vecteurs $x^1, x^2, \ldots, x^k$*

sont positivement indépendants, i.e. *les conditions* $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j = 0$, $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *entraînent* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur k. L'affirmation du lemme est évidente pour $k = 1$ parce que x^1 est non nul, par hypothèse.

Supposons que le lemme est démontré pour des nombres plus petits. Soit $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j = 0$, $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, auquel cas $\lambda_1 x^1 = -\sum_{j=2}^{k} \lambda_j x^j$. Comme $\sum_{j=2}^{k} \lambda_j x^j \in K$, $\lambda_1 x^1 \in K$, on a par définition d'un cône pointé $\lambda_1 x^1 = 0 = \sum_{j=2}^{k} \lambda_j x^j$. Alors $\lambda_1 = 0$, et $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_k = 0$, par hypothèse de récurrence.

THÉORÈME 2.16. *Un cône polyédrique pointé K est l'enveloppe conique de ses vecteurs extrémaux en nombre fini.*

DÉMONSTRATION. Soit $K = \mathrm{Co}\,(x^1, x^2, \ldots, x^k)$. On biffe celui des vecteurs $x^1, x^2, \ldots, x^k$ qui s'exprime comme combinaison linéaire non négative des autres. Si la chose est possible, on examine $k - 1$ vecteurs restants et on répète l'opération. On aboutit finalement à un ensemble de vecteurs, disons, $x^1, x^2, \ldots, x^r$ $(r \leqslant k)$ qui jouit des propriétés suivantes: $K = \mathrm{Co}\,(x^1, x^2, \ldots, x^r)$; aucun vecteur x^j, $1 \leqslant j \leqslant r$, n'est combinaison linéaire non négative des autres.

On montre que cet ensemble est formé de seuls vecteurs extrémaux. Faisons l'hypothèse de x^1 non extrémal. Dans ce cas, $x^1 = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x^j$, où tous les nombres $\alpha_j \geqslant 0$. D'où $(1 - \alpha_1)\, x^1 = \sum_{j=2}^{r} \alpha_j x^j$.

Si $\alpha_1 > 1$, alors $(1 - \alpha_1)\, x^1 \in K$ et $(\alpha_1 - 1)\, x^1 \in K$, i.e. $x^1 = 0$. Si $\alpha_1 = 1$, on a $\sum_{j=2}^{r} \alpha_j x^j = 0$, résultat impossible parce que, premièrement, il contredit le lemme 2.3, et, deuxièmement, aucun vecteur x^j, $j = 1, 2, \ldots, r$, n'est évidemment nul. Soit maintenant $\alpha_1 < 1$. On a $x^1 = \frac{1}{1 - \alpha_1} \sum_{j=2}^{r} \alpha_j x^j$, i.e. x^1 est combinaison linéaire non négative des $x^2, x^3, \ldots, x^r$, propriété exclue. Ainsi, le théorème se trouve démontré.

Faisons une remarque sur la différence entre la notion de point extrême d'un ensemble convexe (définition 2.10) et celle du vecteur extrémal d'un cône convexe (définition 2.14). Ce qui les distingue essentiellement, c'est le fait que le vecteur 0 peut être un point extrême d'un cône sans en être un vecteur extrémal. D'autre part, le point 0 est évidemment un point extrême d'un cône pointé K. En effet, soit $0 = 1/2x' + 1/2x''$, où $x', x'' \in K$. Il en découle $x'' = -x'$, ce qui contredit la définition d'un cône pointé.

§ 4. Structure des ensembles admissibles des problèmes de programmation linéaire

1. On se propose d'étudier d'une manière systématique la structure des ensembles admissibles des problèmes de programmation linéaire. Un ensemble admissible est décrit par le système d'inéquations linéaires de la forme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m. \end{aligned} \tag{2.3}$$

On n'écrit pas à part les contraintes $x_i \geqslant 0$ car ces contraintes, si elles existent, sont incluses dans le système (2.3) sous forme $-x_i \leqslant 0$.

Le symbole a_i désignera dans la suite le vecteur $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (la ligne i de la matrice A des coefficients de (2.3)), et a^j sera le vecteur $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ (la colonne j de A).

Le système d'inéquations (2.3) prend une forme plus compacte, à savoir

$$\langle a_1, x\rangle \leqslant b_1, \quad \langle a_2, x\rangle \leqslant b_2, \ \ldots, \ \langle a_m, x\rangle \leqslant b_m, \tag{2.4}$$

x étant comme toujours $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si l'on fait recours à la notation $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, notre système se récrit

$$Ax \leqslant b, \tag{2.5}$$

où $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

La lettre X désignera dans ce chapitre l'*ensemble des vecteurs réalisables*, i.e. l'ensemble des vecteurs x vérifiant (2.3): $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$. Il se peut que l'ensemble X soit vide. Un exemple simple en est l'ensemble de $\mathbf{R}^1$ défini par les contraintes $x_1 \leqslant 1$, $-x_1 \leqslant -2$. On fait à ce propos la restriction suivante: dans ce paragraphe, toutes les affirmations relatives aux propriétés de X se rapportent au cas de X non vide.

THÉORÈME 2.17. *Tout ensemble X des vecteurs réalisables est convexe et fermé.*

DÉMONSTRATION. On montre que le demi-espace X_i défini par $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$ est convexe. En effet, soit $x, x' \in X_i$. On a $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $\langle a_i, x'\rangle \leqslant b_i$. Soit α un nombre quelconque tel que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, auquel cas

$$\alpha \langle a_i, x\rangle \leqslant \alpha b_i, \quad (1-\alpha) \langle a_i, x'\rangle \leqslant (1-\alpha) b_i.$$

On fait la somme et on utilise la linéarité du produit scalaire, il vient $\langle a_i, \alpha x + (1-\alpha) x'\rangle \leqslant \alpha b_i + (1-\alpha) b_i = b_i$. D'où la convexité de X_i. On constate aisément que l'ensemble X est l'intersection de demi-espaces X_i, i.e. $x \in X$ si et seulement si x est élément de tous les X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Il ne reste qu'appliquer le théorème 2.1 (l'intersection d'ensembles convexes est convexe).

On peut utiliser, pour démontrer le théorème 2.17, l'écriture matricielle (2.5) du système d'inéquations donnant X. Faisons-le car dans la suite nous aurons souvent affaire aux matrices. Si $x, x' \in X$, alors $Ax \leqslant b$, $Ax' \leqslant b$, auquel cas $\alpha Ax \leqslant \alpha b$, $(1-\alpha) Ax' \leqslant (1-\alpha) b$ (on se sert de la non-négativité des nombres α et $1-\alpha$). D'où $\alpha Ax + (1-\alpha) Ax' \leqslant b$. L'opération de multiplication d'une matrice par un vecteur étant linéaire, on a $A(\alpha x + (1-\alpha) x') \leqslant b$, i.e. $\alpha x + (1-\alpha) x' \in X$.

On démontre la deuxième propriété voulue (X est fermé). Soit $x(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, $x(k) \in X$, une suite convergente arbitraire, $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \bar{x}$. On passe à la limite dans $Ax(k) \leqslant b$ quand $k \to \infty$. La continuité de la fonction Ax fait que $Ax \leqslant b$, c.q.f.d.

Les points extrêmes de X sont des objets particulièrement intéressants. Il se peut que X en soit dépourvu (certains exemples de ces X nous sont connus dès le paragraphe précédent). On établit les conditions qui garantissent l'existence des points extrêmes.

DÉFINITION 2.16. Un point $x_0 \in X$ est dit *intérieur* s'il vérifie strictement toutes les inéquations (2.3) (donc (2.4), (2.5)) : $\langle a_i, x_0\rangle < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Tous les autres points de X seront qualifiés de points *frontières*.

Cette définition est parfaitement cohérente avec la notion usuelle d'un point intérieur. En effet, si l'on utilise la continuité des fonctions $\langle a_i, x\rangle$ et le fait qu'elles sont en nombre fini dans notre cas ($i = 1, 2, \ldots, m$), on trouve facilement un nombre ε tel que si la longueur du vecteur $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ est plus petite que ε, $\|\Delta\| < \varepsilon$, alors on ait les inégalités $\langle a_i, x_0 + \Delta\rangle \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, i.e. le point $x_0 + \Delta$ appartient lui aussi à X. En d'autres termes, toutes les fois que X contient un point intérieur x_0, il contient un ε-voisinage de ce point.

Le point intérieur x_0 de X ne peut évidemment être extrême. En effet, il s'écrit $x_0 = 1/2\,(x_0 + \Delta) + 1/2\,(x_0 - \Delta)$, où $x_0 + \Delta$,

$x_0 - \Delta \in X$: contradiction avec la définition 2.10 d'un point extrême. Il est donc clair qu'on trouve les extrêmes parmi les points frontières, i.e. parmi les points pour lesquels au moins une condition (2.3) devient égalité.

DÉFINITION 2.17. Le *support d'un point frontière* x_0 est l'ensemble des contraintes (2.3) vérifiées par x_0 sous forme d'égalités. Autrement dit, le support de x_0 est l'ensemble des hyperplans $\langle a_i, x\rangle = b_i$ qui définissent X et qui contiennent x_0.

Si l'on reprend la fig. 2.1, on voit que le point A a pour support deux droites $3x_1 + 5x_2 = 15$, $10x_1 + 7x_2 = 35$, et le point de coordonnées (2, 0) la droite $x_2 = 0$. Soient $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_j \leqslant m$, $j = 1, 2, \ldots, k$, les numéros des vecteurs a_i qui définissent le support de x_0 et $\bar{\sigma}$ l'ensemble des numéros $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ restants.

On note A_σ la matrice de vecteurs-lignes a_i, $i \in \sigma$, et b_σ le vecteur formé de coordonnées de b indicés par les éléments de σ. On introduit de même les notations $A_{\bar{\sigma}}$ et $b_{\bar{\sigma}}$. Si l'on a par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 10 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 35 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \left(\frac{70}{29}, \frac{45}{29}\right).$$

(c'est le cas de la fig. 2.1), alors $\sigma = (1, 3)$, $\bar{\sigma} = (2, 4, 5, 6)$, $A_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$, $b_\sigma = \begin{pmatrix} 15 \\ 35 \end{pmatrix}$,

$$A_{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les contraintes (2.3) (ou (2.5)) deviennent pour x_0 : $A_\sigma x_0 = b_\sigma$, $A_{\bar{\sigma}} x_0 < b_{\bar{\sigma}}$.

On rappelle que le *rang* d'une matrice est par définition le nombre maximum de ses lignes (ou colonnes) linéairement indépendantes.

THÉOREME 2.18. *Un point $x_0 \in X$ est un point extrême si et seulement si le rang de A_σ est n.*

DÉMONSTRATION. Le cours d'Algèbre linéaire dit que l'équation $A_\sigma x = 0$ n'a pas d'autre solution à part 0 si et seulement si le rang de A_σ est égal au nombre n de variables.

On montre en premier lieu que si x_0 est un point extrême, alors le rang de A_σ vaut n. Supposons que tel n'est pas le cas. Le rang de A est alors inférieur à n, si bien que $A_\sigma x = 0$ a pour solution $\bar{x} \neq 0$. Comme $A_{\bar{\sigma}} x_0 < b_{\bar{\sigma}}$, on trouve $\alpha \neq 0$ suffisamment petit tel que

$$A_{\bar{\sigma}} (x_0 + \alpha\bar{x}) < b_{\bar{\sigma}}, \quad A_{\bar{\sigma}} (x_0 - \alpha\bar{x}) < b_{\bar{\sigma}},$$

et

$$A_\sigma (x_0 + \alpha\bar{x}) = A_\sigma x_0 + \alpha A_\sigma \bar{x} = A_\sigma x_0 = b_\sigma.$$

De même, $A_\sigma (x_0 - \alpha\bar{x}) = b_\sigma$. Il en résulte que $x_0 + \alpha\bar{x}$, $x_0 - \alpha\bar{x}$ sont dans X, ce qui contredit l'hypothèse « x_0 est un point extrême » (en effet, $x_0 = {}^1/_2 (x_0 + \alpha\bar{x}) + {}^1/_2 (x_0 - \alpha\bar{x})$).

Inversement, soit n le rang de A_σ. On admet que x_0 n'est pas un point extrême de X. Il existe deux points $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$, tels que $x_0 = {}^1/_2 x' + {}^1/_2 x''$, auquel cas $b_\sigma = A_\sigma x_0 = {}^1/_2 A_\sigma x' + {}^1/_2 A_\sigma x''$.

Du moment que $A_\sigma x' \leqslant b_\sigma$, $A_\sigma x'' \leqslant b_\sigma$, la dernière égalité entraîne $A_\sigma x' = b_\sigma = A_\sigma x''$, d'où $A_\sigma (x' - x'') = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur le rang de A_σ (car $x' - x'' \neq 0$). Le théorème se trouve prouvé.

Le théorème démontré donne lieu à deux résultats importants.

THÉORÈME 2.19. *Les points extrêmes de l'ensemble X, s'il en existe, sont en nombre fini.*

DÉMONSTRATION. Selon le théorème précédent, il correspond à tout point extrême une matrice carrée non dégénérée A_σ qui le définit complètement : $x_0 = A_\sigma^{-1} b_\sigma$. Les points extrêmes de X sont donc en nombre fini (car il en est de même des sous-matrices de A).

THÉORÈME 2.20. *Si l'ensemble X est borné, il est un polyèdre convexe.*

On le prouve à l'aide de la définition 2.11 d'un polyèdre convexe et du théorème 2.13 (tout ensemble fermé et borné (compact) est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes).

2. La démonstration du théorème 2.18 suggère l'idée qu'on ferait bien d'imiter le cas des systèmes d'équations linéaires et d'étudier le système homogène $Ax \leqslant 0$.

On appellera K l'ensemble des vecteurs x vérifiant $Ax \leqslant 0$: $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$. Le lecteur démontrera, s'il le désire, que K est un cône convexe (voir exer. 11).

L'affirmation suivante est d'une portée capitale.

THÉORÈME 2.21. *L'ensemble $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$ est un cône polyédrique convexe.*

DÉMONSTRATION. Soit, dans $\mathbf{R}^n$, le cube $Q = \{x \mid -1 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ et l'intersection $S = K \cap Q$.

L'ensemble S est un polyèdre convexe (th. 2.20) parce qu'il est défini par le système d'un nombre fini d'inéquations linéaires: $S = \{x \mid Ax \leqslant 0,\ x_j \leqslant 1,\ -x_j \leqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ et est évidemment borné. Soient $x^1, x^2, \ldots, x^k$ les points extrêmes de S, et soit le cône $\overline{K} = \left\{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\right\}$ enveloppe conique de l'ensemble $\{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$. On montre que $K = \overline{K}$. En effet, $\overline{K} \subseteq K$ du moment que tous les x^i, $i = 1, 2, \ldots, k$, appartiennent au cône K ($S \subseteq K$) et que $\overline{K}$ est le plus petit cône contenant ces points. D'autre part, si l'on suppose que $x \in K$, il existe un nombre $\lambda > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda x \in Q$, i.e. $\lambda x \in K \cap Q = S$. On représente donc le vecteur λx comme combinaison linéaire convexe de points extrêmes de S: $\lambda x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$. Alors $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, où $\alpha_i = \beta_i/\lambda \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Il en découle $x \in \overline{K}$, i.e. $K \subseteq \overline{K}$. Conclusion: $K = \overline{K}$.

Le théorème est illustré par les fig. 2.18, *a* et *b*. Les cônes K sont ici hachurés et les ensembles S quadrillés. On a marqué les vecteurs sous-tendant le cône K. Il y en a qui sont superflus, mais

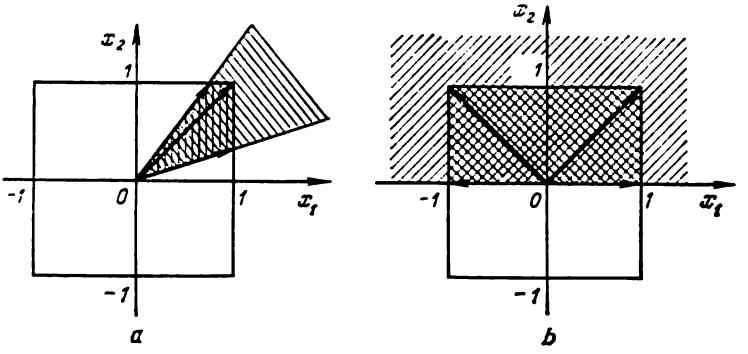


Fig. 2.18.

l'essentiel est que K est engendré par des vecteurs en nombre fini.

Le théorème 2.16 permet de dire que ce sont les cônes pointés qui possèdent une structure particulièrement simple. Aussi il est important d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$ soit pointé.

THÉORÈME 2.22. *Le cône* $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$ *est pointé si et seulement si le rang de la matrice* A *est égal à* n.

DÉMONSTRATION. On fait l'hypothèse de A de rang n, de K non pointé et de $x \neq 0$ tel que $x \in K$, $-x \in K$. Dans ce cas, $Ax \leqslant 0$, $-Ax \leqslant 0$, i.e. $Ax = 0$, égalité impossible parce que cette équation homogène possède une solution unique $x = 0$ (le rang de A est égal au nombre de variables). Si l'on suppose par contre que le rang de A est inférieur à n, alors $Ax = 0$ a une solution non nulle $x \neq 0$, et $A(-x) = 0$, i.e. $x \in K$, $-x \in K$, si bien que K n'est pas pointé, ce qui démontre le théorème.

Le cas de A de rang n se présente souvent dans des applications pratiques. Ainsi, la matrice des contraintes du programme linéaire standard (voir ch. I, § 3) est de rang n. En effet, si l'on se rappelle la convention faite dans ce chapitre, les contraintes $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \ldots$ $\ldots, x_n \geqslant 0$ s'incorporent dans la matrice générale des contraintes. Donc, la matrice des coefficients du problème standard renferme une sous-matrice $-I$ de rang n.

DÉFINITION 2.18. Si le rang de la matrice A est égal à n, l'ensemble $X = \{x \mid Ax \leqslant b\}$ est dit *régulier*.

THÉORÈME 2.23. *L'ensemble* X *présente des points extrêmes si et seulement s'il est régulier.*

DÉMONSTRATION. Soit X un ensemble non régulier, i.e. le rang de A est plus petit que n. La matrice A ne renferme donc pas de sous-matrices A_σ de rang n et, partant, il n'y a pas de points extrêmes (voir th. 2.18).

La démonstration dans l'autre sens utilise un procédé qui permet de ramener l'étude d'un système quelconque d'inéquations à celle d'un système homogène.

Soit l'espace $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$ de points (x, t), $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}^1$, et soit, dans $\mathbf{R}^{n+1}$, le système d'inéquations linéaires $Ax - bt \leqslant 0$, $-t \leqslant 0$. La matrice des contraintes s'écrit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et son rang est $n + 1$ (vu que A est de rang n). Les théorèmes 2.21 et 2.22 impliquent que l'ensemble $\tilde{K}$ des solutions est un cône polyédrique convexe pointé. Le cône $\tilde{K}$ possède des vecteurs extrémaux (th. 2.16). On suppose que tous ces vecteurs extrémaux s'écrivent $(x, 0)$. Comme $\tilde{K}$ coïncide avec l'enveloppe conique de l'ensemble de ses vecteurs extrémaux, tout vecteur de $\tilde{K}$ prend la forme $(x, 0)$. Cela signifie qu'aucun vecteur de $\tilde{K}$ n'est $(x, 1)$, i.e. le système d'inéquations $Ax \leqslant b$ est incompatible, cas qui ne nous intéresse pas. On admet

donc qu'il existe dans $\widetilde{K}$ un vecteur extrémal (x, t), $t > 0$. On montre que le point $\frac{1}{t} x$ est alors un extrême de X. Il est clair que $\frac{1}{t} x \in X$. Soit $\frac{1}{t} x = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{2} x''$, avec $x' \neq x''$, $x' \in X$, $x'' \in X$. On a $(x, t) = \frac{1}{2} (tx', t) + \frac{1}{2} (tx'', t)$. De plus, $(tx', t) \in \widetilde{K}$, $(tx'', t) \in \widetilde{K}$. Démontrons-le pour (tx', t) par exemple. Comme $x' \in X$, on a $Ax' \leqslant \leqslant b$, auquel cas $A(tx') \leqslant bt$, c.q.f.d. L'hypothèse « (x, t) est un vecteur extrémal de $\widetilde{K}$ » entraîne $(tx', t) = \lambda (x, t)$, $\lambda \geqslant 0$, $(tx'', t) = = \mu (x, t)$, $\mu \geqslant 0$. Dans ce cas, $\lambda = \mu = 1$, $tx' = x = tx''$, i.e. $x' = x''$, ce qui contredit l'hypothèse de $x' \neq x''$.

3 On constate une analogie entre la structure de l'ensemble des solutions des systèmes d'équations linéaires et celle de l'ensemble X des programmes réalisables du problème de programmation linéaire (i.e. l'ensemble des solutions du système (2.3)).

On éclaircit cette analogie par recours au système $Ax = b$ et au système homogène associé $Ax = 0$. Soient $\overline{X}$ et L les ensembles des solutions respectifs, i.e. $\overline{X} = \{x \mid Ax = b\}$, $L = \{x \mid Ax = 0\}$. On note que L est un sous-espace, i.e. L est un cas particulier des cônes. Il est classique en Algèbre linéaire que la solution générale du premier système s'écrit $x_0 + L$, x_0 étant tout vecteur de $\overline{X}$. En d'autres termes, $\overline{X} = x_0 + L$.

Voyons ce qu'il en est du système d'inéquations linéaires de la forme (2.3).

On désigne par M l'enveloppe linéaire convexe de l'ensemble des points extrêmes de X. On vient de démontrer le théorème 2.23 qui entraîne que si X est régulier, alors M n'est pas vide et est un polyèdre convexe.

THÉORÈME 2.24. *Si le rang de la matrice A est n (l'ensemble X est régulier), alors $X = M + K$.*

DÉMONSTRATION. On utilise l'artifice qui a permis de démontrer le théorème 2.23. On a établi notamment que si (x, t), $t > 0$, est un vecteur extrémal de $\widetilde{K}$, alors $\frac{1}{t} x$ est un point extrême de X. La réciproque est également vraie : si x est un point extrême de X, alors $(x, 1)$ est un vecteur extrémal dans $\widetilde{K}$. En effet, si l'on admet que $(x, 1) = \frac{1}{2} (x', t_1) + \frac{1}{2} (x'', t_2)$, où $(x', t_1) \in \widetilde{K}$, $(x'', t_2) \in \widetilde{K}$, alors $x = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{2} x''$, $t_1 + t_2 = 2$. Si t_1, $t_2 > 0$, on a $\frac{1}{t_1} x' \in X$, $\frac{1}{t_2} x'' \in X$.

Le point x admet la représentation $x = \frac{t_1}{2}\left(\frac{1}{t_1}x'\right) + \frac{t_2}{2}\left(\frac{1}{t_2}x''\right)$. D'où $\frac{1}{t_1}x' = \frac{1}{t_2}x'' = x$ (x étant un point extrême), i.e. $(x', t_1) = t_1(x, 1)$, $(x'', t_2) = t_2(x, 1)$, ce qui démontre que $(x, 1)$ est un vecteur extrémal de $\widetilde{K}$.

On suppose que t_1 ou t_2 est nul, disons $t_2 = 0$. On a $t_1 = 2$, $\frac{1}{2}x' \in X$, $\frac{1}{2}x'' \in X$. Soit σ le support du point extrême x (voir déf. 2.17), auquel cas $b_\sigma = A_\sigma x = \frac{1}{2}A_\sigma x' + \frac{1}{2}A_\sigma x''$. Etant donné que $\frac{1}{2}A_\sigma x' \leqslant b_\sigma$, $\frac{1}{2}A_\sigma x'' \leqslant 0$, il en découle en particulier que $A_\sigma x'' = 0$. Le rang de la matrice A_σ est n (th. 2.18), si bien que $x'' = 0$. Par conséquent, $x' = 2x$ et $(x', t_1) = 2(x, 1)$, $(x'', t_2) = 0\cdot(x, 1)$. On a donc établi une fois de plus que $(x, 1)$ est un vecteur extrémal de $\widetilde{K}$.

Soit $(x^1, 1), (x^2, 1), \ldots, (x^k, 1), (x^{k+1}, 0), \ldots, (x^s, 0)$ les vecteurs extrémaux appartenant aux différentes demi-droites extrémales du cône $\widetilde{K}$, les k premiers vecteurs correspondant aux points extrêmes de X.

Il est évident que $x^j \in K$ pour $j = k + 1, \ldots, s$. On passe au théorème à démontrer. On a certes $X \supseteq M + K$. En effet, si $x^0 \in M$, $z \in K$, alors $Ax^0 \leqslant b$ et $Az \leqslant 0$. On montre l'inclusion opposée. Soit $x \in X$, auquel cas $(x, 1) \in \widetilde{K}$ et

$$(x, 1) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x^j, 1) + \sum_{j=k+1}^{s} \beta_j (x^j, 0),$$

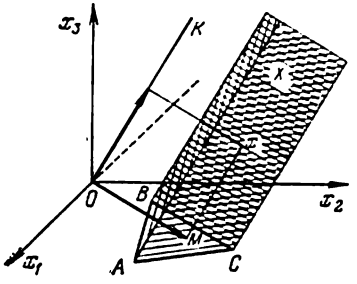


Fig. 2.19.

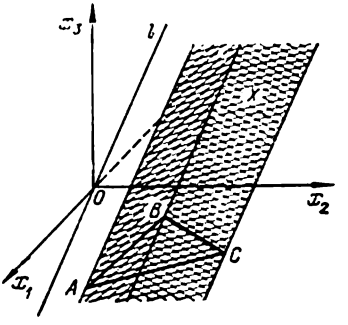


Fig. 2.20.

avec $\alpha_j \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$ pour tous les j. D'où

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j + \sum_{j=k+1}^{s} \beta_j x^j, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1.$$

Or $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j \in M$ en tant que combinaison linéaire convexe des points extrêmes x^j, $j = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{j=k+1}^{s} \beta_j x^j \in K$ puisque $x^j \in K$, $j = k+1, \ldots, s$. On a le résultat voulu.

Les fig. 2.19 et 2.20 servent à illustrer le théorème 2.24. L'ensemble X de la fig. 2.19 est un cylindre incliné dans $\mathbf{R}^3$ dont la base triangulaire inférieure est dans le plan x_1Ox_2. Le polyèdre M est ici le triangle engendré par les points extrêmes A, B, C, et le cône K est la demi-droite issue de O et parallèle à la génératrice du cylindre. On voit que tout point $x \in X$ peut s'écrire comme somme de deux vecteurs, l'un étant dans K et l'autre dans M.

Quant à X de la fig. 2.20, c'est un cylindre illimité de deux côtés. Les points extrêmes font défaut, mais on voit assez bien que X est la somme du triangle ABC et du sous-espace L. Il se trouve que la situation est caractéristique du cas général de X non régulier.

Montrons-le. Avec la notation a^j pour la colonne j de la matrice A, on se convainc de suite que le système (2.3) peut s'écrire

$$a^1x_1 + a^2x_2 + \ldots + a^nx_n \leqslant b. \tag{2.6}$$

Si le rang de A est $r < n$, il existe, parmi $a^1, a^2, \ldots, a^nr$, colonnes linéairement indépendantes, les autres en étant combinaison linéaire. On admet que la propriété d'être linéairement indépendantes est spéciale à r premières colonnes, auquel cas $a^s = \sum_{j=1}^{r} \beta_{js} a^j$, $s = r+1, \ldots, n$. On porte dans (2.6) et on réduit les termes semblables, il vient

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = \sum_{j=1}^{r} a^j x_j + \sum_{s=r+1}^{n} a^s x_s = \sum_{j=1}^{r} a^j x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} \beta_{js} a^j \right) x_s =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \left(x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \beta_{js} x_s \right) a^j.$$

Ainsi, le système (2.6) est équivalent à

$$\sum_{j=1}^{r} \left(x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \beta_{js} x_s \right) a^j \leqslant b. \tag{2.7}$$

On introduit la notation

$$l_j(x) = x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \beta_{js} x_s, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$l(x) = (l_1(x), l_2(x), \ldots, l_r(x), 0, 0, \ldots, 0), \quad l(x) \in \mathbf{R}^n.$$

On note une propriété évidente de la transformation l: $l(l(x)) \equiv l(x)$.

Soit, dans $\mathbf{R}^n$, deux sous-espaces vectoriels

$$L = \{x \mid l(x) = 0\}, \quad \mathbf{R}^r = \{x \mid x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0\}$$

et l'ensemble $Q = X \cap \mathbf{R}^r$.

On établit facilement que $x \in Q$ si et seulement si 1) $l(x) = x$; 2) $Ax \leqslant b$.

Les points de l'espace $\mathbf{R}^r$ sont de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$, si bien que le système $Ax \leqslant b$ s'écrit pour cet espace $\sum_{j=1}^{r} a^j x_j \leqslant b$. Le rang de A étant r, l'ensemble Q s'écrit par le théorème 2.24 comme somme $Q = M + K_0$, avec M un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^r$ et K_0 un cône dans $\mathbf{R}^r$, $K_0 = \{x \mid x \in \mathbf{R}^r, Ax \leqslant 0\}$.

On montre que $X = Q + L$. L'inclusion $X \supseteq Q + L$ est évidente. En effet, si $x = y + z$, où $y \in Q$, $z \in L$, alors $Ax = Ay + Az \leqslant b$ (parce que $Ay \leqslant b$, $Az \leqslant 0$), i.e. $x \in X$. Inversement, soit $x \in X$. On pose $y = x - l(x)$, auquel cas $l(y) = l(x) - l(l(x)) = 0$, i.e. $y \in L$. Comme $x = l(x) + y$, on a $x \in Q + L$ parce que $l(x) \in Q$.

Ainsi, $X = M + K_0 + L$. On montre que $K_0 + L = K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$. On a par suite de (2.7) que $Ay = 0$ pour tout $y \in L$. La définition de K_0 entraîne $Az \leqslant 0$ quel que soit $z \in K_0$. Donc $K_0 + L \subseteq K$. Inversement, on suppose que x est dans K et on fait $y = x - l(x)$. Il est déjà connu que dans ce cas $y \in L$. Cela étant, $l(x) \in \mathbf{R}^r$ et $Ax \leqslant 0$, i.e. $l(x) \in K_0$. Vu que $x = y + l(x)$, on a $x \in K_0 + L$. On vient de démontrer le

THÉORÈME 2.25. *L'ensemble X des programmes du problème de programmation linéaire s'écrit $X = M + K$, avec M un polyèdre convexe et $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$.*

§ 5. Equivalence de deux définitions d'un ensemble polyédrique convexe

Selon les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, l'ensemble X des solutions du système d'inéquations linéaires $Ax \leqslant b$ s'écrit $X = M + K$, où M est un polyèdre convexe borné et K un cône polyédrique convexe. Avec les définitions 2.11 et 2.12, on énonce ce fait comme suit.

L'ensemble X admet la représentation

$$X = \left\{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j y^j\right\}, \tag{2.8}$$

où x^i, $i = 1, 2, \ldots, k$, et y^j, $j = 1, 2, \ldots, s$, sont des vecteurs de X, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

On formule naturellement la

DÉFINITION 2.19. L'ensemble X de la forme (2.8) s'appelle *ensemble polyédrique convexe.*

Cette définition aidant, les résultats principaux du § 4 constituent une démonstration du fait que tout ensemble X défini par un système d'inéquations linéaires est un ensemble polyédrique convexe.

Il s'avère que la réciproque est vraie elle aussi, à savoir tout ensemble polyédrique convexe s'écrit comme ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires. Cela autorise à énoncer la

DÉFINITION 2.20. On appelle *ensemble polyédrique convexe* tout ensemble X qui coïncide avec l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.

Lorsque nous démontrerons l'équivalence de deux dernières définitions, nous terminerons par là même l'exposé de la théorie des ensembles polyédriques convexes qui fait l'objet des §§ 2 à 5 de ce chapitre.

Aux termes du théorème 2.17, l'ensemble des solutions du système est convexe et fermé. En premier lieu, on prouve donc ces propriétés pour X de la forme (2.8). On introduit les notations

$$M = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k;\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\},$$

$$K = \left\{ y \mid y = \sum_{j=1}^{s} \beta_j y^j,\ \beta_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, s \right\},$$

auquel cas $X = M + K$. Il est connu que M et K sont un polyèdre convexe et un cône polyédrique convexe respectivement, si bien que X est convexe en tant que somme de deux ensembles convexes (th. 2.2).

L'ensemble X est fermé en vertu du

LEMME 2.4. *Soient M un compact et K un fermé. La somme $X = M + K$ est un ensemble fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $v^1, v^2, \ldots, v^m$ une suite convergente de points de X, $\lim_{m \to \infty} v^m = v$. On montre que $v \in X$, ce qui entraîne la propriété demandée de X. Il existe pour chaque v^m des éléments $x^m \in M$, $y^m \in K$ tels que $v^m = x^m + y^m$, $m = 1, 2, \ldots$ Avec M un compact, on extrait de $\{x^m\}$ (qui peut ne pas converger) une suite partielle convergente. On n'introduit pas de nouveaux indices (car

cela alourdirait l'exposé), et on estime sans restreindre la généralité que la suite $\{x^m\}$ converge. Soit $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x$. On a $x \in M$ du moment que M est fermé. Etant donné $y^m = v^m - x^m$, on affirme à la lumière de certains résultats connus de la théorie des limites que la suite $\{y^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, possède une limite qu'on note y. Donc $y = \lim\limits_{m\to\infty} y^m = \lim\limits_{m\to\infty} v^m - \lim\limits_{m\to\infty} x^m = v - x$, $y \in K$, d'où $v = x + y$, i.e. $v \in X$.

On se propose de former le système d'inéquations linéaires dont X défini par (2.8) est l'ensemble des solutions.

Prenons l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ de points $w = (u_1, u_2, \ldots, u_n, v)$ ou, plus brièvement, $w = (u, v)$, avec $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et v un nombre. Soit, dans $\mathbf{R}^{n+1}$, le système d'inéquations linéaires

$$\begin{aligned} &\langle u, x^1\rangle - v \leqslant 0, \quad \langle u, x^2\rangle - v \leqslant 0, \ldots, \langle u, x^k\rangle - v \leqslant 0, \\ &\langle u, y^1\rangle \leqslant 0, \quad \langle u, y^2\rangle \leqslant 0, \ldots, \langle u, y^s\rangle \leqslant 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$x^1, x^2, \ldots, x^k$ et $y^1, y^2, \ldots, y^s$ étant des vecteurs de dimension n intervenant dans l'écriture (2.8) de X. On désigne par W le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui coïncide avec l'ensemble des solutions du système (2.9). D'après le théorème 2.21, W est un cône polyédrique convexe, si bien qu'on trouve des points $w^1, w^2, \ldots, w^r \in W$ pour lesquels

$$W = \left\{ w \,|\, w = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t w^t,\ \gamma_t \geqslant 0,\ t = 1, 2, \ldots, r \right\}. \tag{2.10}$$

Chaque point w^t s'écrit $w^t = (u^t, v^t)$, $t = 1, 2, \ldots, r$.

On construit moyennant les nombres v^t et les vecteurs u^t le système d'inéquations dans $\mathbf{R}^n$:

$$\langle u^t, x\rangle \leqslant v^t, \quad t = 1, 2, \ldots, r. \tag{2.11}$$

Soit $\bar{X}$ l'ensemble des solutions du système. On dit que $\bar{X}$ coïncide avec X défini par (2.8).

On commence par montrer que $X \subseteq \bar{X}$. Soit $x \in X$ un point quelconque. On a pour certains $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ et $\beta_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j y^j.$$

On porte cette expression de x dans (2.11), il vient

$$\langle u^t, x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle u^t, x^i\rangle + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \langle u^t, y^j\rangle \leqslant v^t \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = v^t.$$

On a utilisé le fait que le point $w^t = (u^t, v^t)$ est solution du système (2.9), i.e. $\langle u^t, x^i\rangle \leqslant v^t$, $i = 1, 2, \ldots, k$, et $\langle u^t, y^j\rangle \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$. L'inclusion $X \subseteq \overline{X}$ est donc établie.

Supposons que $\overline{X} \nsubseteq X$. Il existe un point $x_0 \in \overline{X}$, $x_0 \notin X$. On applique à x_0 et à l'ensemble convexe fermé X le théorème de séparation (voir § 2). Résultat : il existe un vecteur p de dimension n et un nombre c tels que $\langle p, x\rangle \leqslant c$ pour tous les $x \in X$ et $\langle p, x_0\rangle > c$.

On montre que le point $(p, c) \in \mathbf{R}^{n+1}$ vérifie les contraintes du système (2.9). C'est vrai en ce qui concerne k premières contraintes parce que $\langle p, x^i\rangle \leqslant c$ ($x^i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, k$). Pour voir s'il en est de même des s contraintes restantes, on prend l'ensemble de points $x_\beta = x + \beta y^j$, avec j fixé, $1 \leqslant j \leqslant s$, β un nombre non négatif quelconque et $x \in X$ tout point (fixe) de l'ensemble X. Evidemment, $x_\beta \in X$ pour tout; $\beta \geqslant 0$, auquel cas $\langle x_\beta, p\rangle = \langle x, p\rangle + \beta\langle y^j, p\rangle \leqslant$ $\leqslant c$. Or, la dernière inégalité n'est possible que si $\langle y^j, p\rangle \leqslant 0$. Donc, $(p, c) \in W$. Aussi on a pour certains $\gamma_t \geqslant 0$, $t = 1, 2, \ldots, r$,

$$(p, c) = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t w^t = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t (u^t, v^t),$$

i.e. $p = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t u^t$, $c = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t v^t$. Comme $x_0 \in \overline{X}$, i.e. x_0 satisfait aux conditions (2.11),

$$\langle p, x_0\rangle = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t \langle u^t, x_0\rangle \leqslant \sum_{t=1}^{r} \gamma_t v^t = c,$$

ce qui contredit $\langle p, x_0\rangle > c$, et l'inclusion $\overline{X} \subseteq X$ a lieu et, partant, l'égalité $\overline{X} = X$.

Des développements ci-dessus on déduit le

THÉORÈME 2.26. *Il y a équivalence entre les définitions* 2.19 *et* 2.20 *d'un ensemble polyédrique convexe.*

§ 6. Inéquations linéaires

1. Dans les deux paragraphes précédents, on a analysé la structure de l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires de la forme (2.3). On se propose maintenant de répondre à la question suivante.

Dans quel cas une inéquation (2.3) est une conséquence des autres ?

Supposons, par exemple, que l'inéquation m de (2.4) est combinaison linéaire non négative des autres, i.e. il existe des nombres non négatifs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ tels que

$$a_m = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i a_i, \quad b_m \geqslant \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i b_i.$$

Il est clair que la m-ième inéquation de (2.4) est « redondante ». En effet, si le point x vérifie seulement $m - 1$ premières inéquations, il en est automatiquement de même de l'inéquation de numéro m;

$$\langle a_m, x\rangle = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \langle a_i, x\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i b_i \leqslant b_m.$$

DÉFINITION 2.21. Nous dirons que l'inéquation

$$\langle c, x\rangle \leqslant d \tag{2.12}$$

est une conséquence du système $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, si l'on a (2.12) pour tout x vérifiant toutes les inéquations du système. On le traduit en notation abrégée par

$$Ax \leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d.$$

DÉFINITION 2.22. Nous dirons que l'inéquation (2.12) est une *combinaison linéaire non négative* des inéquations du système (2.4) si l'on trouve des nombres non négatifs $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tels que

$$c = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i, \tag{2.13}$$

$$d \geqslant \sum_{i=1}^{m} p_i b_i. \tag{2.14}$$

Les formules deviennent plus compactes si l'on recourt à la notation A' (matrice transposée de A) et à $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$:

$$c = A'p, \tag{2.15}$$

$$d \geqslant \langle b, p\rangle. \tag{2.16}$$

On établit sans peine que si $\langle c, x\rangle \leqslant d$ est combinaison linéaire non négative des inéquations (2.4), alors $Ax \leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d$.

La réciproque est également vraie, à savoir si $\langle c, x\rangle \leqslant d$ est une conséquence du système $Ax \leqslant b$, alors il s'agit d'une combinaison linéaire non négative de $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, constituant ce système.

Le résultat s'énonce sous forme du

THÉORÈME 2.27. *Pour que l'inéquation $\langle c, x\rangle \leqslant d$ soit une conséquence du système $Ax \leqslant b$, il faut et il suffit que le système* (2.15), (2.16) *admette une solution non négative p.*

Il n'y a à démontrer, on l'a signalé, que l'existence d'une solution non négative du système $A'p = c$, $\langle b, p\rangle \leqslant d$, i.e. l'affirmation dans un sens. Ce résultat remarquable découle directement d'un théorème de dualité du chapitre suivant, et il lui est en fait équivalent. On se borne pour l'instant à obtenir certains résultats préliminaires qui présentent leur intérêt propre en tant qu'un outil pour étudier les systèmes d'inéquations linéaires.

2. Lemme 2.5. *Si* $Ax \leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d$, *alors* $Ax \leqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$.

Démonstration. Par absurde, supposons qu'il existe un vecteur $\bar{x}$ pour lequel $A\bar{x} \leqslant 0$ et $\langle c, \bar{x}\rangle > 0$. Soit x tout vecteur tel que $Ax \leqslant b$. (Il y a nécessairement existence sinon la condition $Ax \leqslant$ $\leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d$ du lemme n'a pas de sens.) Dans ce cas, $x_\lambda =$ $= x + \lambda\bar{x}$ vérifie pour tout $\lambda \geqslant 0$ l'inégalité $Ax_\lambda \leqslant b$. Par conséquent, on a $\langle c, x_\lambda\rangle = \langle c, x\rangle + \lambda \langle c, \bar{x}\rangle \leqslant d$ quel que soit $\lambda \geqslant 0$. La chose est impossible parce que $\langle c, \bar{x}\rangle > 0$ et $\lambda \langle c, \bar{x}\rangle$ peut être aussi grand que l'on veut par le choix de λ.

Le lemme démontré permet de se borner primitivement à la relation $Ax \leqslant 0 \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$. En d'autres termes, étudier les propriétés d'un ensemble polyédrique arbitraire, c'est étudier dans un sens les cônes polyédriques. Le fait nous est familier dès les §§ 4 et 5.

On note que le théorème 2.27 se réduit dans ce cas à affirmer l'existence d'une solution non négative du système (2.15), l'inéquation (2.16) étant vérifiée automatiquement. Ce cas particulier est décrit par le

Lemme 2.6 (Farkaš). *Pour que* $Ax \leqslant 0 \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$, *il faut et il suffit que le système* (2.15) $A'p = c$ *admette une solution non négative.*

Démonstration. Soit $A'p = c$, $p \geqslant 0$. On a

$$\langle c, x\rangle = \langle A'p, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i \langle a_i, x\rangle \leqslant 0$$

si $Ax \leqslant 0$.

Inversement, on suppose que $Ax \leqslant 0 \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$ et que l'équation (2.15) n'a pas de solution non négative. Soit le cône polyédrique convexe $K = \mathrm{Co}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ enveloppe conique des vecteurs-lignes de la matrice A. La non-existence d'une solution non négative de (2.15) signifie que le vecteur c n'est pas dans le cône K. (On rappelle que la définition 2.12 d'une enveloppe conique fait que K contient toutes les combinaisons linéaires non négatives des vecteurs a_i, $i =$ $= 1, 2, \ldots, m$.) Il est connu (th. 2.15) que K est un cône fermé.

On applique à $c \notin K$ et à K fermé le théorème de séparation sans oublier l'existence d'un hyperplan séparant d'appui (voir § 2). Il existe un vecteur x_0 tel que $\langle x_0, a\rangle \leqslant 0$ pour $a \in K$ et $\langle x_0, c\rangle > 0$. On vient d'utiliser le théorème 2.6 disant que tout hyperplan d'appui à un cône passe par le point 0. Comme $a_i \in K$, on a $\langle x_0, a_i\rangle \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, i.e. $Ax_0 \leqslant 0$, auquel cas $\langle x_0, c\rangle \leqslant 0$: contradiction qui démontre le lemme de Farkaš.

Le lemme s'énonce également comme alternative pour le système d'équations linéaires.

THÉORÈME 2.28. *Une et une seule de deux affirmations est vraie*: 1) *l'équation* $A'p = c$ *admet une solution non négative*; 2) *il existe une solution au système d'inéquations* $Ax \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$.

Des résultats analogues au théorème 2.28 jouent un grand rôle en programmation linéaire et constituent un instrument pour étudier les systèmes d'inéquations linéaires. Ci-dessous deux théorèmes du genre.

THÉORÈME 2.29. *Une et une seule de deux affirmations est vraie*: 1) *l'inéquation* $A'p \geqslant c$ *a une solution non négative*; 2) *il existe une solution non négative au système d'inéquations* $Ax \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$.

DÉMONSTRATION. On vérifie aisément que la propriété d'avoir une solution non négative ne peut être juste dans les deux cas. En effet, on suppose par l'absurde que ces solutions existent, soit $p \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ respectivement. Dans ce cas, $\langle A'p, x\rangle \geqslant \langle c, x\rangle$. Comme $Ax \leqslant 0$, $p \geqslant 0$, on a $\langle A'p, x\rangle = \langle p, Ax\rangle \leqslant 0$ en vertu de la propriété connue du produit scalaire. D'où l'inégalité contradictoire $0 \geqslant \langle c, x\rangle > 0$.

Si l'on fait, d'autre part, l'hypothèse que $A'p \geqslant c$ ne possède pas de solution non négative, alors il n'existe pas de solution (p, q) non négative de l'équation $A'p - q = c$. Selon le théorème 2.28, le système $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$, est alors possible. Mais la première inéquation donne $Ax \leqslant 0$, $-x \leqslant 0$, i.e. $x \geqslant 0$.

Théorème 2.30. *Une et une seule de deux affirmations est vraie*: 1) *l'équation* $A'p = 0$ *a une solution positive* $p > 0$; 2) *il existe un vecteur* x *tel que* $Ax \geqslant 0$, $Ax \neq 0$.

DÉMONSTRATION. On laisse au lecteur le soin de démontrer que les deux propositions ne peuvent être vraies à la fois.

Admettons que le système $Ax \geqslant 0$ n'a pas d'autre solution à part x tel que $Ax = 0$. Soit le cône $K = \{p \mid A'p = 0\}$ dans l'espace $\mathbf{R}^m$ et son dual $K^* = \{y \mid \langle y, p\rangle \leqslant 0$ pour tout $p \in K\}$. On montre que $K^* \cap \mathbf{R}^m_+ = 0$. Soit $y \in K^*$, auquel cas $A'p \leqslant 0$, $-A'p \leqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \langle y, p\rangle \leqslant 0$. Il existe par le lemme de Farkaš des vecteurs non négatifs u, $v \in \mathbf{R}^n_+$ pour lesquels $y = Au - Av = A(u - v)$. Si $y \geqslant 0$, alors $Ax \geqslant 0$, avec $x = u - v$, d'où $Ax = 0$ par hypothèse, i.e. $y = 0$. Le cône K^* étant évidemment convexe et fermé, on a par le théorème 2.8: $K = (K^*)^*$ contient un vecteur positif.

Exercices

1. Donner un exemple d'ensemble X qui, toutes les fois qu'il contient des points x^1, x^2 quelconques, contient le point $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ sans être convexe.

2. Démontrer que si l'ensemble X est fermé et s'il contient le point $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ dès qu'il renferme x^1, x^2, quelconques, alors il est convexe.

3. Démontrer que l'épigraphe de la branche positive d'une hyperbole, i. e. l'ensemble $X = \{(x, y) \mid x > 0, y \geqslant 1/x\}$, est convexe.

4. Construire l'hyperplan qui sépare l'ensemble X de l'exercice 3 et le point (5, 0).

5. Démontrer que si X est un ensemble tel qu'il existe un hyperplan qui sépare X et tout point $x^0 \notin X$, alors X est convexe.

6. Soient X un compact convexe (i.e. X est borné et fermé), $a \notin X$ et $b \in X$ le point de X le plus éloigné de a. Démontrer que b est un point extrême de X.

INDICATION. Procéder par l'absurde et utiliser la propriété « l'inégalité du triangle $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ devient égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires ».

7. Démontrer que tout hyperplan d'appui à un compact convexe en contient certains points extrêmes.

8. On dit que deux ensembles X_1 et X_2 sont *séparés strictement* par l'hyperplan $\langle p, x\rangle = c$ si $\langle p, x_1\rangle \leqslant c$ pour tout $x_1 \in X_1$ et $\langle p, x^2\rangle > c$ pour tous les $x^2 \in X_2$. Donner l'exemple de deux convexes fermés qu'aucun hyperplan ne sépare strictement.

9. Démontrer que si X convexe admet deux hyperplans d'appui distincts en un point frontière x^0, alors ces hyperplans sont une infinité.

10. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ un vecteur qui est combinaison linéaire convexe de vecteurs $x^1, x^2, \ldots, x^k \in \mathbf{R}^n$. Démontrer que x s'écrit comme combinaison linéaire convexe d'au plus $n + 1$ éléments de l'ensemble $\{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$.

INDICATION. Utiliser les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\x^i\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}, i=1, 2, \ldots, k$, et le lemme 2.1.

11. Démontrer que l'ensemble $K = \langle x \mid Ax \leqslant 0\}$ est un cône convexe.

12. Démontrer que le cône K^* dual d'un cône convexe K est convexe.

13. Soit $K = \mathbf{R}^n$. Trouver K^*.

14. Soit K un cône polyédrique,

$$K = \mathrm{Co}\,\{x^1, x^2, \ldots, x^k\},\quad K^+ = \{p \mid \langle x^i, p\rangle \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Démontrer que $K^+ = K^*$.

15. Soit K un cône polyédrique convexe. Démontrer que le cône K^* est polyédrique lui aussi.

INDICATION. Utiliser exer. 14 et th. 2.21.

16. (THÉORÈME DE MINKOWSKI.) Soit K un cône polyédrique. Selon l'exercice précédent, K^* est polyédrique, i.e. il existe $p^1, p^2, \ldots, p^m$ tels que $K^* = \mathrm{Co}\,\{p^1, p^2, \ldots, p^m\}$. Démontrer que $K = \{x \mid \langle x, p^j\rangle \leqslant 0, j = 1, 2, \ldots, m\}$.

17. Démontrer que l'enveloppe conique $\mathrm{Co}\,(M)$ est le plus petit cône convexe contenant l'ensemble M.

CHAPITRE III

THÉORIE DE LA DUALITÉ

§ 1. Problème dual en programmation linéaire

Soit le problème de programmation linéaire

$$\begin{array}{c} \max\,(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \quad \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{array} \tag{3.1}$$

ou, en notation matricielle,

$$\begin{array}{c} \max\langle c,\ x\rangle \\ Ax \leqslant b. \end{array} \tag{3.2}$$

On appelle *problème dual* de (3.1) un programme linéaire à m variables $p_1, p_2, \ldots, p_m$ de la forme

$$\begin{array}{c} \min\,(b_1p_1 + b_2p_2 + \ldots + b_mp_m) \\ a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m = c_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m = c_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m = c_n, \\ p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ p_m \geqslant 0, \end{array} \tag{3.3}$$

ou, en notation matricielle,

$$\begin{array}{c} \min\langle b,\ p\rangle \\ A'p = c,\ p \geqslant 0, \end{array} \tag{3.4}$$

où $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Voici la règle de construction du problème (3.3) à partir du problème (3.1) : le nombre de variables p_i de (3.3) est égal au nombre de lignes de la matrice A de (3.1). La matrice des contraintes de (3.3) est la transposée de A. Le vecteur second membre des contraintes du problème dual est le vecteur des coefficients de la forme linéaire à maximiser de (3.1), les inégalités devenant des égalités. Inversement, la fonction économique de (3.3) est une forme linéaire à coefficients définis par le vecteur second membre des contraintes du problème initial, et le symbole max devient min. Les variables duales p_i sont asujetties à la condition de non-négativité. S'agissant du problè-

me standard (3.1), la théorie de la dualité se propose d'étudier les relations entre (3.1) et (3.3). Le problème (3.1) dont (3.3) est le dual sera appelé *direct* (ou *primal*).

On dira que la variable duale p_i est associée à la contrainte de numéro i, $i = 1, 2, \ldots, m$, du primal; inversement, la variable x_j correspond à la j-ième contrainte, $j = 1, 2, \ldots, n$, du dual.

Comment le type du programme linéaire (voir § 3, ch. I) influe sur le problème dual?

DUAL DU PROBLÈME STANDARD

$$\begin{gathered}\max\langle c, x\rangle \\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

On introduit les notations $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$, où I est une matrice unité d'ordre n, et $\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, 0 étant le vecteur nul de dimension n. Le problème se récrit

$$\begin{gathered}\max\langle c, x\rangle \\ \bar{A}x \leqslant \bar{b},\end{gathered} \tag{3.6}$$

forme qui coïncide avec (3.1).

Le problème dual de (3.6) est alors à $m + n$ variables que nous désignerons par $v = (p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ou par $v = (p, q)$ tout court (ici $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$).

On emploie l'algorithme décrit et on obtient le dual:

$$\begin{gathered}\min\langle \bar{b}, v\rangle \\ \bar{A}'v = c,\ v \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Comme $\bar{A}' = (A', -I)$, on a, avec les notations anciennes, au lieu de (3.7):

$$\begin{gathered}\min\langle b, p\rangle \\ A'p - q = c,\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.8}$$

L'égalité $A'p - q = c$, où $q \geqslant 0$, est vérifiée si et seulement si $A'p \geqslant c$, si bien que l'écriture (3.8) est équivalente à

$$\begin{gathered}\min\langle b, p\rangle \\ A'p \geqslant c,\quad p \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.9}$$

En effet, si (p^*, q^*) est solution de (3.8), p^* est évidemment solution de (3.9). Inversement, si p^* est solution de (3.9), alors le couple (p^*, q^*), $q^* = A'p^* - c$, représente une solution de (3.8).

Aussi on appelle (3.9) *problème dual du programme linéaire sous forme standard* (3.5).

DUAL DU PROBLÈME CANONIQUE

$$\begin{gathered}\max\langle c, x\rangle \\ Ax = b,\ x \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.10}$$

On remplace chaque équation $\langle a_i, x\rangle = b_i$ par deux inéquations $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $\langle -a_i, x\rangle \leqslant -b_i$. Il est clair que le problème (3.10) est équivalent à

$$\begin{gathered}\max\langle c, x\rangle \\ Ax \leqslant b,\ -Ax \leqslant -b,\ x \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Avec les notations $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, on met (3.11) sous la forme

$$\begin{gathered}\max\langle c, x\rangle \\ \tilde{A}x \leqslant \tilde{b},\ x \geqslant 0.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Il s'agit sans doute d'un problème standard. On utilise la formule (3.9) pour obtenir le dual de (3.12) :

$$\begin{gathered}\min\langle \tilde{b}, v\rangle \\ \tilde{A}'v \geqslant c,\ v \geqslant 0,\end{gathered} \tag{3.13}$$

où $v = (r_1, r_2, \ldots, r_m, s_1, s_2, \ldots, s_m)$ est un vecteur dans l'espace de dimension $2m$.

Les notations anciennes donnent

$$\begin{gathered}\min\left(\langle b, r\rangle - \langle b, s\rangle\right) \\ A'r - A's \geqslant c,\ r \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\end{gathered} \tag{3.14}$$

avec $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$. On note $p = r - s$, ce qui fournit le problème équivalent à (3.14)

$$\begin{gathered}\min\langle b, p\rangle \\ A'p \geqslant c,\end{gathered} \tag{3.15}$$

où l'on n'impose au vecteur p aucune condition supplémentaire (du type de non-négativité) parce que le fait « p est une différence de deux vecteurs non négatifs r et s » est sans information.

Le problème (3.15) constitue *le dual du programme linéaire canonique* (3.10).

Inversement, on vérifie sans peine que le dual de (3.9) coïncide avec (3.5) et le dual de (3.15) est bien (3.10). Aussi, on dit que tout problème direct et son dual sont en dualité.

Les développements antérieurs et la propriété des problèmes (3.5) et (3.9) (et des problèmes (3.10) et (3.15)) d'être en dualité entraînent un résultat facile à justifier par des calculs formels, à savoir la i-ième variable d'un programme linéaire est soumise à la condition de non-négativité si et seulement si la contrainte i du dual est une inéquation.

On en reste là et on écrit sans aucune transformation formelle le dual du problème général de la programmation linéaire (voir § 3, ch. I):

$$\begin{gathered}\min \sum_{i=1}^{k} b_i p_i + \sum_{i=k+1}^{m} b_i p_i \\ \langle a^j, p\rangle \leqslant c_j,\ j=1, 2, \ldots, r,\ \langle a^j, p\rangle = c_j, \\ j=r+1, \ldots, m, \quad p_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, k,\end{gathered} \tag{3.16}$$

où a^j est, on se le rappelle, la colonne j de la matrice A, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Dans les paragraphes suivants, on appliquera la théorie de la dualité au couple (3.1) (3.3) mis essentiellement sous forme matricielle (3.2) et (3.4) respectivement, et on la généralisera aux autres types de programmes linéaires.

§ 2. Théorème de dualité

1. On élucide au début des relations simples entre le primal (3.2) et le dual (3.4).

On rappelle à propos du problème (3.2) plusieurs concepts de la programmation linéaire.

La fonction (forme) linéaire $\langle c, x\rangle$ constitue la *fonction économique* du problème.

Un vecteur x respectant les contraintes du problème, i.e. $Ax \leqslant b$, est appelé *vecteur réalisable* ou *programme*.

L'ensemble $X = \{x \mid Ax \leqslant b\}$ de tous les vecteurs réalisables est dit *admissible*.

Si l'ensemble admissible X du problème (3.1) est non vide, alors le problème *a un sens*.

Si la fonction économique $\langle c, x\rangle$ atteint un maximum sur l'ensemble admissible X et si ce maximum est égal à d, alors on dit que d est la *valeur du problème* (3.1).

Tout vecteur réalisable $x^* \in X$ qui rend maximum la fonction économique ($\langle c, x^*\rangle = d$) est une *solution* (ou un *programme optimal*) *du problème* (3.1).

Il y a lieu de noter le fait évident suivant : $x^* \in X$ est optimal si et seulement si tout $x \in X$ vérifie l'inéquation $\langle c, x\rangle \leqslant \langle c, x^*\rangle$.

Faisons subir au système d'inéquations linéaires (3.1) certaines transformations. (On le fera souvent dans la suite de l'exposé.) Soit $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ un vecteur non négatif, $p_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. On multiplie l'inéquation i de (3.1) par le nombre p_i:

$$p_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \leqslant p_i b_i. \tag{3.17}$$

Vu que $p_i \geqslant 0$, on conserve le signe.

On somme le résultat par rapport à $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i b_i. \tag{3.18}$$

Le nombre $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ étant la i-ième coordonnée du vecteur Ax, on récrit (3.18) de manière plus condensée

$$\langle p, Ax\rangle \leqslant \langle p, b\rangle. \tag{3.19}$$

Evidemment,

$$\langle p, Ax\rangle = \langle A'p, x\rangle, \tag{3.20}$$

si bien que $Ax \leqslant b$ entraîne pour $p \geqslant 0$ (3.19) ou

$$\langle A'p, x\rangle \leqslant \langle p, b\rangle. \tag{3.21}$$

Dans la suite, on utilisera les formules (3.19), (3.20) en omettant les calculs relatifs aux sommes.

Le passage de $Ax \leqslant b$ à (3.19), $p \geqslant 0$, s'appelle *multiplication scalaire par le vecteur p.*

THÉOREME 3.1. *Si l'ensemble X des programmes du problème* (3.1) *n'est pas vide et si la fonction économique $\langle c, x\rangle$ est majorée sur X, alors le problème* (3.1) *admet une solution.*

DÉMONSTRATION. Selon le théorème 2.25 du chapitre II, l'ensemble X admet la représentation $X = M + K$, M étant un polyèdre convexe et K un cône polyédrique convexe, $K = \{y \mid Ay \leqslant 0\}$. Soit

$$M = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\},$$

où $(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ est l'ensemble des points extrêmes du polyèdre M. On introduit la notation $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle c, x^i\rangle$. Soit x^* un point extrême de M pour lequel $d = \langle c, x^*\rangle$. On montre que x^* est une solution de (3.1). Le point x^* étant un élément de X, on exige seulement que tout $x \in X$ vérifie $\langle c, x\rangle \leqslant d$. En effet, soit $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + y$, avec $y \in K$, auquel cas

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle c, x^i\rangle + \langle c, y\rangle \leqslant d \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = d.$$

On s'est servi de $\langle c, y\rangle \leqslant 0$ pour $y \in K$. En effet, si $\langle c, y\rangle > 0$, la fonction économique $\langle c, x\rangle$ prend sur X des valeurs arbitrairement grandes (i.e. elle n'est pas bornée) parce que le vecteur $x^* + \lambda y$ appartient pour tout $\lambda \geqslant 0$ à X, c.-à-d. il est réalisable.

Si M est vide, on a $X = K$, et le point $x^* = 0$ est évidemment une solution de (3.1).

On note que le théorème 3.1 joue uniquement en programmation linéaire. Soit par exemple le problème

$$\max x_2$$
$$x_1x_2 \leqslant -1, \quad x_1 \geqslant 0$$

dont la fonction économique est linéaire et l'une des contraintes ne l'est pas.

L'ensemble admissible X est une portion de plan limitée par une branche de la parabole (fig. 3.1).

L'ensemble X est convexe (démontrer !) et fermé. La fonction économique x_2 est majorée par 0, mais elle n'atteint pas sur X sa borne supérieure égale à 0.

La démonstration ci-dessus entraîne de suite le

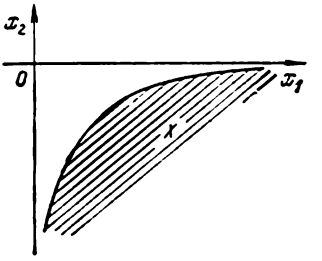


Fig. 3.1.

THÉORÈME 3.2. *Si l'ensemble X des vecteurs réalisables possède des points extrêmes* (i.e. *la matrice A est de rang n*) *et le problème* (3.1) *admet une solution, il y en a parmi les extrêmes un point optimum.*

La démonstration est immédiate car si (3.1) a x^* comme solution et $\langle c, x^*\rangle = d$, alors la forme linéaire $\langle c, x\rangle$ est bornée sur X par le nombre d. Il ne reste qu'à s'adresser à la démonstration du théorème 3.1.

2. On désigne par P l'ensemble des programmes du dual (3.4) : $P = \{p \mid A'p = c,\ p \geqslant 0\}$.

LEMME 3.1. *Soient $x \in X$, $p \in P$ des vecteurs réalisables quelconques du problème primal* (3.2) *et de son dual* (3.4) *respectivement. On a*

$$\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, p\rangle. \tag{3.22}$$

DÉMONSTRATION. On a $x \in X$, si bien que $Ax \leqslant b$. On multiplie scalairement par le vecteur $p \geqslant 0$. Il résulte de (3.19) et (3.21) $\langle c, x\rangle = \langle A'p, x\rangle = \langle p, Ax\rangle \leqslant \langle p, b\rangle$.

LEMME 3.2. *Soient $x^* \in X$, $p^* \in P$ des programmes des problèmes* (3.2) (3.4) *respectivement. Si $\langle c, x^*\rangle = \langle b, p^*\rangle$, alors x^* est une solution de* (3.2) *et p^* une solution de* (3.4).

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ un vecteur réalisable quelconque du problème (3.2). D'après le lemme 3.1, $\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, p^*\rangle = \langle c, x^*\rangle$, i.e. $\langle c. x\rangle \leqslant \langle c, x^*\rangle$. On opère de même pour p^*.

Le lemme 3.2 donne une condition suffisante d'optimalité pour les programmes. On verra plus loin qu'il s'agit également d'une condition nécessaire d'optimalité de x^* et p^*.

La théorie de la dualité a pour support deux résultats appelés *théorème de dualité* et *théorème d'équilibre*. Le dernier théorème doit son

nom aux interprétations économiques d'un problème dual du chapitre IV.

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Si les problèmes en dualité* (3.2), (3.4) *ont un sens, alors ils possèdent l'un et l'autre une solution et leurs valeurs coïncident.*

DÉMONSTRATION. Supposons que les problèmes (3.2), (3.4) ont un sens et soit $\bar{p} \in P$ un programme quelconque du second. Aux termes du lemme 3.1, la fonction économique $\langle c, x\rangle$ est bornée sur X par le nombre $\langle b, \bar{p}\rangle$. On en déduit par le théorème 3.1 qu'il existe une solution x^* au problème (3.2).

Soit, dans l'espace $\mathbf{R}^m$, le système d'équations linéaires

$$A'p = c, \tag{3.23}$$

$$\langle b, p\rangle = \langle c, x^*\rangle. \tag{3.24}$$

Si le vecteur p^* est non négatif et représente une solution du système, alors

1) p^* est un programme du problème (3.4) parce que $p^* \geqslant 0$, $A'p^* = c$;

2) p^* est un programme optimal du problème (3.4) parce que $\langle b, p^*\rangle = \langle c, x^*\rangle$, ce qui est une condition suffisante d'optimalité (lemme 3.2);

3) les valeurs $\langle c, x^*\rangle$ et $\langle b, p^*\rangle$ des problèmes (3.2) et (3.4) coïncident.

On a donc le théorème de dualité si l'on montre l'existence d'une solution non négative au système (3.23), (3.24).

On emploie les notations matricielles. Soit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A' \\ b \end{pmatrix}$, $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ \langle c, x^*\rangle \end{pmatrix}$, auquel cas

$$\tilde{A}p = \tilde{c}, \tag{3.25}$$

système étudié avec les nouvelles notations.

On admet que le système (3.25) ne présente pas de solutions non négatives, ce qui signifie, vu le théorème 2.28 du chapitre II, qu'il existe une solution du système d'inéquations

$$\tilde{A}'\tilde{x} \leqslant 0, \quad \langle \tilde{c}, \tilde{x}\rangle > 0. \tag{3.26}$$

Ici $\tilde{x}$ est un vecteur de dimension $n + 1$ (car la matrice $\tilde{A}' = (A, b)$ est à $n + 1$ colonnes). On note $\tilde{x} = (x, \gamma)$, où $x \in \mathbf{R}^n$ et γ est un nombre. Le système (3.26) prend la forme

$$Ax + \gamma b \leqslant 0, \tag{3.27}$$

$$\langle c, x\rangle + \gamma\langle c, x^*\rangle > 0. \tag{3.28}$$

On montre cependant que ce système n'a pas de solution (x, γ).

On multiplie scalairement (3.27) par le vecteur $\bar{p} \geqslant 0$, un programme du problème (3.4):

$$\langle \bar{p}, Ax \rangle + \gamma \langle \bar{p}, b \rangle \leqslant 0. \tag{3.29}$$

Avec les équations $\langle \bar{p}, Ax \rangle = \langle A'\bar{p}, x \rangle = \langle c, x \rangle$, on tire de (3.25) $\langle c, x \rangle + \gamma \langle b, \bar{p} \rangle \leqslant 0$, ce qui donne compte tenu de (3.28): $\gamma (\langle c, x^* \rangle - \langle b, \bar{p} \rangle) > 0$. Du moment que $\langle c, x^* \rangle \leqslant \langle b, \bar{p} \rangle$, on a $\gamma < 0$.

On divise membre à membre (3.27) par $-\gamma$ positif, il vient $A(-x/\gamma) \leqslant b$, i.e. le vecteur $-x/\gamma$ est réalisable pour le problème (3.2). Comme x^* est une solution du problème (3.2), on a $\langle c, -x/\gamma \rangle \leqslant \langle c, x^* \rangle$ ou $\langle c, x \rangle + \gamma \langle c, x^* \rangle \leqslant 0$, ce qui contredit (3.28).

Ainsi, le système (3.27), (3.28) est impossible, d'où l'affirmation du théorème.

3. Théorème d'équilibre. *Soient* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ *des programmes optimaux du primal* (3.1) *et du dual* (3.3) *respectivement. Si* $p_i^* > 0$, *alors*

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i. \tag{3.30}$$

Démonstration. $x^* \in X$, si bien que $Ax^* \leqslant b$. On multiplie scalairement par $p^* \geqslant 0$, il vient $\langle c, x^* \rangle = \langle A'p^*, x^* \rangle = \langle p^*, Ax^* \rangle \leqslant \langle b, p^* \rangle$. Selon le théorème de dualité, $\langle c, x^* \rangle = \langle b, p^* \rangle$, d'où $\langle p^*, Ax^* \rangle = \langle b, p^* \rangle$. Donc, $\langle p^*, -Ax^* + b \rangle = 0$. Le vecteur $r = -Ax^* + b$ est non négatif parce que $Ax^* \leqslant b$. Le produit scalaire $\langle p^*, r \rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i^* r_i$ est nul si et seulement si $p_i^* r_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$. Si $p_i^* > 0$, alors

$$0 = r_i = (b - Ax^*)_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*,$$

d'où le résultat voulu.

On note que les problèmes (3.1) et (3.3) peuvent admettre plus d'une solution et que le théorème d'équilibre parle justement de tout couple x^*, p^*.

Les deux théorèmes précédents entraînent des conséquences dont voici quelques-unes.

Théorème 3.3. *Si l'un des problèmes en dualité est possible, il en est de même de l'autre.*

Démonstration. Sous l'hypothèse que le problème (3.1) possède une solution x^*, deux cas sont possibles à priori.

1) Le problème (3.3) a un sens, auquel cas l'ensemble P n'est pas vide et la fonction économique $\langle b, p \rangle$ est minorée sur P par

le nombre $\langle c, x^* \rangle$ (lemme 3.1). Aux termes du théorème 3.1, ce problème est possible.

2) Le problème (3.3) n'a pas de sens, i.e. le système d'équations ne possède pas de solution non négative. Selon le théorème 2.28 du chapitre II, il existe une solution $\bar{x}$ au système $Ax \leqslant 0$, $\langle c, x \rangle > 0$. Prenons le vecteur $\tilde{x} = x^* + \bar{x}$. Il est clair que $A\tilde{x} \leqslant b$, i.e. $\tilde{x} \in X$, et $\langle c, \tilde{x} \rangle = \langle c, x^* \rangle + \langle c, \bar{x} \rangle > \langle c, x^* \rangle$: contradiction qui exclut le cas 2).

Le théorème 3.3. montre que trois cas peuvent se présenter:

a) les deux problèmes (3.1), (3.3) ont un sens (et sont donc possibles);

b) les deux problèmes (3.1), (3.3) n'ont pas de sens;

c) l'un des problèmes a un sens et l'autre non.

Ci-dessous trois exemples correspondants:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{ll} \max (x_1 + x_2) & \min (4p_1 + 4p_2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4, & 2p_1 + p_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, & p_1 + 2p_2 = 1, \\ & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0; \\ x^* = (4/3,\ 4/3). & p^* = (1/3,\ 1/3). \end{array}$$

Comme les vecteurs x^* et p^* réalisent les mêmes optimums des fonctions économiques du primal et du dual, ces vecteurs sont solutions respectives des problèmes (lemme 3.2).

$$\text{b)}\quad \begin{array}{ll} \max (x_1 + 3x_2) & \min (3p_1 - 4p_2) \\ x_1 - x_2 \leqslant 3, & p_1 - p_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 \leqslant -4. & -p_1 + p_2 = 3; \\ & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Les deux problèmes n'ont pas de sens.

$$\text{c)}\quad \begin{array}{ll} \max x_1 & \min p_1 \\ x_1 - x_2 \leqslant 1. & p_1 = 1,\ -p_1 = 0,\ p_1 \geqslant 0. \end{array}$$

Le problème direct a un sens tandis que l'ensemble admissible du dual est vide. Le premier n'admet pas de programme optimal comme il s'ensuit du théorème 3.3

THÉORÈME 3.4. *Si l'un de deux problèmes en dualité n'a pas de sens et l'autre a son ensemble admissible non vide, alors la fonction économique de celui-ci n'est pas bornée sur cet ensemble.*

DÉMONSTRATION. On admet que le problème (3.3) n'a pas de sens et que l'ensemble admissible X de (3.1) n'est pas vide. Si l'on suppose que la fonction économique $\langle c, x \rangle$ est bornée sur X, le théorème

3.1 implique la possibilité du problème (3.1), ce qui contredit l'affirmation du théorème 3.3.

THÉORÈME 3.5. *Soient* $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m)$ *des programmes respectifs des problèmes* (3.1) *et* (3.3), *et on est dans la condition « si* $\bar{p}_i > 0$, *alors*

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n = b_i \text{ ».} \tag{3.31}$$

Alors $\bar{x}$ *et* $\bar{p}$ *sont des programmes optimaux des problèmes respectifs.*

DÉMONSTRATION. La condition (3.31) entraîne $\langle \bar{p}, A\bar{x}\rangle = \langle \bar{p}, b\rangle$. Comme $\langle \bar{p}, A\bar{x}\rangle = \langle A'\bar{p}, \bar{x}\rangle = \langle c, \bar{x}\rangle$, on a $\langle c, \bar{x}\rangle = \langle b, \bar{p}\rangle$, et il ne nous reste qu'à s'adresser au lemme 3.2.

Le théorème 3.5 est la réciproque du théorème d'équilibre. Ces deux résultats réunis fournissent une condition nécessaire et suffisante d'optimalité des vecteurs réalisables.

4. Le théorème de dualité permet de démontrer le théorème 2.27 énoncé plus haut (voir § 6, ch II).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.27. On suppose que $\langle c, x\rangle \leqslant d$ est une conséquence du système d'inéquations $Ax \leqslant b$. Cela signifie le caractère borné de la forme linéaire $\langle c, x\rangle$ sur l'ensemble $X = \{x \mid Ax \leqslant b\}$. On reprend le programme linéaire (3.2) avec la matrice A et les vecteurs b, c donnés. Le problème admet une solution x^* (th. 3.1). Soit $\bar{d}$ la valeur du problème: $\langle c, x^*\rangle = \bar{d}$, auquel cas $\bar{d} \leqslant d$. Il existe, par le théorème de dualité, une solution p^* au problème dual (3.4), i.e. $A'p^* = c$, $p^* > 0$, et $\langle p^*, b\rangle = \bar{d} \leqslant d$.

Avec les artifices qui permettent de convertir un programme linéaire sous une forme en un problème de forme différente, on généralise la théorie de la dualité à tous les types de problèmes. Ainsi, on constate sans peine que le théorème de dualité est juste pour les programmes linéaires standard, canonique et général.

On énonce par exemple le théorème d'équilibre pour le premier de ces problèmes.

Soient $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ *des programmes optimaux respectifs du problème primal* (3.5) *et de son dual* (3.9). *Si* $p_i^* > 0$, *alors*

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i.$$

Si $x_j^* > 0$, *alors*

$$a_{1j}p_1^* + a_{2j}p_2^* + \ldots + a_{mj}p_m^* = c_j.$$

§ 3. Une démonstration sommaire du théorème de dualité

Le théorème en question est le pivot de la théorie de la programmation linéaire. Parmi ses diverses démonstrations, il y en a purement algébriques qui ne recourent pas à des théorèmes de séparation et d'autres qui s'inspirent des idées foncièrement nouvelles relevant de la pénalisation. Pour ce qui est de ce livre, on a utilisé en l'occurrence tout ce qu'on a appris dans le chapitre II parlant des ensembles polyédriques convexes. La théorie de ces ensembles décrivant complètement la structure des ensembles admissibles des programmes linéaires est une partie inséparable de la programmation linéaire. N'empêche que dans ce paragraphe on démontre le théorème de dualité sans s'appuyer sur les résultats fondamentaux relatifs aux ensembles polyédriques.

On utilisera les affirmations suivantes:

théorème de séparation (§ 2, ch. II),

théorème de cône polyédrique convexe fermé (§ 3, ch. II), relations simples entre les problèmes en dualité (lemmes 3.1 et 3.2 du § 2, ch. III),

alternative pour les systèmes d'inéquations linéaires (th. 2.29 du § 6, ch. II).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DUALITÉ POUR LE PROGRAMME LINÉAIRE SOUS FORME STANDARD.

Soient deux problèmes standards duals l'un de l'autre:

$$\begin{array}{ll} \max\langle c, x\rangle & \min\langle b, y\rangle \\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0 & A'y \geqslant c,\ y \geqslant 0. \end{array}$$

On suppose qu'ils ont un sens.

Prenons le système d'inéquations linéaires par rapport aux variables $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ dans l'espace $\mathbf{R}^{m+n}$:

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b,\ A'y \geqslant c, \\ \langle x, c\rangle \geqslant \langle y, b\rangle,\quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.32}$$

LEMME 3.3. *Si* (x^*, y^*) *est solution du système* (3.32), *alors les vecteurs* x^* et y^* *sont des solutions du problème primal et de son dual respectivement.*

DÉMONSTRATION. En effet, x^* et y^* sont des vecteurs réalisables respectifs de deux problèmes considérés parce que (x^*, y^*) vérifie le système (3.32). Selon le lemme 3.1, on a $\langle c, x^*\rangle \leqslant \langle b, y^*\rangle$. Mais (3.32) entraîne $\langle c, x^*\rangle \geqslant \langle b, y^*\rangle$, donc $\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle$, et le lemme 3.2 conduit au résultat demandé.

Ainsi, on démontre le théorème de dualité si l'on montre l'existence d'une solution (x^*, y^*) au système (3.32).

Ce système s'écrit en langage matriciel

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A' \\ -c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \geqslant 0, \tag{3.33}$$

ou

$$\bar{A}z \leqslant \bar{b}, \quad z \geqslant 0, \tag{3.34}$$

où

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A' \\ -c & b \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = (b, -c, 0), \quad z = (x, y).$$

LEMME 3.4. *Si les deux programmes linéaires standards en dualité ont leurs ensembles admissibles respectifs non vides, alors le système d'inéquations* (3.32) *possède une solution.*

DÉMONSTRATION. On suppose que l'affirmation du lemme est fausse et que le système (3.32) (et, partant, (3.33) et (3.34)) n'a pas de solution. Comme le veut le théorème 2.29 du ch. II, il existe dans ce cas une solution au système

$$\begin{gathered} \bar{A}'\bar{v} \geqslant 0, \\ \langle \bar{v}, \bar{b} \rangle < 0, \\ \bar{v} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Détaillons-le :

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} A' & 0 & -c \\ 0 & -A & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \geqslant 0, \\ \langle v, b \rangle - \langle w, c \rangle < 0, \quad v \geqslant 0, \ w \geqslant 0, \ u \geqslant 0, \end{gathered} \tag{3.36}$$

avec $\bar{v} = (v, w, u)$. Ici v est un vecteur de dimension m, w et n-dimensionnel et u est un nombre.

Le système (3.36) se récrit :

$$\begin{gathered} A'v - uc \geqslant 0, \quad -Aw + ub \geqslant 0, \\ \langle v, b \rangle - \langle w, c \rangle < 0, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0, \quad u \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.37}$$

On montre l'impossibilité de (3.37).

Soient x et y des vecteurs réalisables respectifs du problème primal et de son dual. On a

$$\begin{gathered} \langle v, b \rangle \geqslant \langle v, Ax \rangle = \langle A'v, x \rangle \geqslant u \langle c, x \rangle, \\ \langle w, c \rangle \leqslant \langle w, A'y \rangle = \langle Aw, y \rangle \leqslant u \langle b, y \rangle, \end{gathered}$$

i.e.

$$\langle v, b \rangle \geqslant u \langle x, c \rangle, \quad \langle w, c \rangle \leqslant u \langle y, b \rangle.$$

On fait la différence:

$$0 > \langle v, b\rangle - \langle w, c\rangle \geqslant u\,(\langle x, c\rangle - \langle y, b\rangle),$$

d'où $u > 0$.

Prenons les vecteurs $\tilde{v} = v/u$ et $\tilde{w} = w/u$. Compte tenu de $u > 0$, on tire de (3.37):

$$A'\tilde{v} \geqslant c, \quad \tilde{v} \geqslant 0,$$
$$A\tilde{w} \leqslant b, \quad \tilde{w} \geqslant 0,$$
$$\langle \tilde{w}, c\rangle < \langle \tilde{v}, b\rangle.$$

La première ligne traduit la propriété de $\tilde{v}$ d'être un vecteur réalisable du dual sous forme standard, la deuxième donne la même propriété pour $\tilde{w}$ et le primal. La dernière inéquation contredisant le lemme 3.2 n'est donc jamais vérifiée.

Les lemmes 3.3 et 3.4 entraînent de suite la validité du théorème de dualité.

§ 4. Ensemble des solutions des problèmes de programmation linéaire

Soient X^0 l'ensemble non vide des solutions du problème (3.2) et d la valeur du problème. On voit facilement que X^0 est un ensemble polyédrique convexe. En effet, X^0 est évidemment défini par le système d'inéquations linéaires $\langle c, x\rangle \leqslant d$, $\langle -c, x\rangle \leqslant -d$, $Ax \leqslant b$, si bien que cette propriété de X^0 découle directement de la définition 2.20 d'un ensemble polyédrique convexe. Conformément au théorème 2.25, l'ensemble X^0 admet la représentation

$$X^0 = M^{X^0} + K^{X^0},$$

M^{X^0} étant un polyèdre convexe et

$$K^{X^0} = \{x \mid Ax \leqslant 0, \ \langle c, x\rangle = 0\}.$$

On veut savoir la relation entre M^{X^0} et M de $X = M + K$. (On se souvient que $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$.)

On montre qu'on peut prendre pour M^{X^0} l'ensemble $M \cap X^0$.

En effet, l'intersection de deux ensembles polyédriques convexes M et X^0 est un ensemble polyédrique convexe (démontrer !). La propriété de borne de M implique celle de l'intersection. Ainsi, $M \cap X^0$ est un polyèdre convexe. On vérifie la justesse de l'égalité

$$X^0 = M \cap X^0 + K^{X^0},$$

et on montre à cet effet qu'on a nécessairement $m \in X^0$, $y \in K^{X^0}$ dans la représentation $x^0 = m + y$, $m \in M$, $y \in K$, de tout point $x^0 \in X^0$.

En effet, $d = \langle c, x^0\rangle = \langle c, m\rangle + \langle c, y\rangle \leqslant d + \langle c, y\rangle$, d'où $\langle c, y\rangle \geqslant 0$. On suppose que $\langle c, y\rangle > 0$ et on prend le point $x(\lambda) =$

$= m + \lambda y$. Evidemment, $x(\lambda) \in X$ pour chaque $\lambda > 0$. Dans ce cas, $\langle c, x(\lambda)\rangle = \langle c, m\rangle + \lambda\langle c, y\rangle$, d'où l'on conclut qu'avec λ suffisamment grand, on obtient un vecteur réalisable $x(\lambda)$ tel que la forme linéaire atteigne sur ce vecteur une valeur aussi importante qu'on le veut. Alors le problème (3.2) est impossible, ce qui contredit l'hypothèse de X^0 non vide. Ainsi, $\langle c, y\rangle = 0$, qui donne $y \in K^{X^0}$ par suite de la condition $y \in K$. Il en découle, en outre, l'égalité $d = \langle c, m\rangle$ qui signifie que le point m est une solution du problème, i.e. $m \in X^0$. On a donc prouvé l'inclusion $X^0 \subseteq M \cap X^0 + K^{X^0}$, et l'inclusion contraire est évidente.

Plaçons-nous dans un cas particulier où l'ensemble X présente des points extrêmes (i.e. X est régulier). On rappelle que le polyèdre convexe M de $X = M + K$ est alors défini de façon unique: il est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points extrêmes de X. L'ensemble X^0 possède également des points extrêmes par le théorème 3.2, et M^{X^0} est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points extrêmes de X^0 (th. 2.24), Les développements antérieurs permettent de dire que $M^{X^0} = M \cap X^0$.

On note que tout point extrême de X^0 est un point extrême de X. En effet, soit x^0 un point extrême de X^0 qui est supposé ne pas avoir la même propriété en ce qui concerne X. On trouve $x^1, x^2 \in X$ tels que $x^0 = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.

Le point $x^0 \in X^0$ ne peut avoir cette forme-là, si bien qu'au moins l'un des points x^1, x^2 n'est pas élément de X^0. Soit $x^1 \notin X^0$. Dans ce cas, $\langle c, x^1\rangle < d$. On obtient moyennant $\langle c, x^2\rangle \leqslant d$: $d = \langle c, x^0\rangle = \frac{1}{2}\langle c, x^1\rangle + \frac{1}{2}\langle c, x^2\rangle < d$, contradiction qui démontre la propriété voulue de x^0.

Si l'ensemble X est régulier, le polyèdre convexe M^{X^0} est donc décrit comme suit: c'est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \cap X^0$, où $\{x^i, i = 1, 2, \ldots, k\}$ est l'ensemble de tous les points extrêmes de X.

On passe à l'ensemble P^0 des solutions du problème dual (3.4). Il est immédiat de montrer qu'il s'agit d'un ensemble polyédrique convexe.

L'ensemble P des vecteurs réalisables du problème dual admet nécessairement des points extrêmes (car le rang de la matrice des contraintes est égal au nombre m de variables). L'ensemble M^P de la somme $P = M^P + K^P$ est l'enveloppe convexe des points extrêmes de P, $K^P = \{p \mid A'p = 0, p \geqslant 0\}$.

Si $\{p^1, p^2, \ldots, p^s\}$ sont tous les points extrêmes de P, l'ensemble P^0 s'écrit

$$P^0 = M^{P^0} + K^{P^0},$$

avec M^{P^0} l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{p^1, p^2, \ldots, p^s\} \cap P^0$,

$$K^{P^0} = \{p \mid A'p = 0, \langle b, p\rangle = 0, p \geqslant 0\}.$$

§ 5. Interprétation des coûts duals et propriétés de dérivabilité de la fonction de valeur

1. Le formalisme mathématique des paragraphes précédents consacrés à la théorie de la dualité est un instrument utile pour étudier les modèles linéaires. On s'interroge à ce propos sur la possibilité d'interpréter un dual en termes significatifs d'un primal.

Prenons par exemple le modèle d'élaboration d'un programme de production (§ 2, ch. I). Formellement, c'est, rappelons-le, le problème sous forme standard

$$\begin{aligned} &\max \langle c, x\rangle \\ &Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

La matrice A définit la technologie. Sa j-ième colonne $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ est formée de coefficients a_{ij} qui donnent la quantité de la i-ième ressource nécessaire pour fabriquer une unité du bien j. Le vecteur $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ est le vecteur des ressources disponibles.

Le problème dual s'écrit

$$\begin{aligned} &\min \langle b, p\rangle \\ &A'p \geqslant c, \quad p \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Soit $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ une solution quelconque du dual. S'agissant du programme linéaire sous forme standard, le théorème d'équilibre dit que $(Ax^*)_i < b_i$ entraîne $p^* = 0$ pour toute solution x^* de (3.38). On considère donc naturellement p_i^* comme coût de pénurie de la ressource i: si la ressource b_i n'est pas consommée totalement pour un programme optimal x^* du problème (3.38), son coût est nul, i.e. elle n'est pas déficitaire. Autrement dit, si l'on augmente la quantité disponible de la seule ressource i, on n'arrive pas à accroître la valeur de la fonction économique.

Le problème (3.38) peut avoir en fait une autre solution $\bar{x}$ vérifiant $(A\bar{x})_i = b_i$, égalité qui signifie qu'étant donné le programme de production $\bar{x}$, la ressource i est totalement employée. Mais on montrera plus loin que cela ne change rien; si au moins une solution p^* du problème dual (3.39) satisfait à $p_i^* = 0$, l'augmentation de la quantité de la seule ressource i n'entraîne pas une valeur plus grande de la fonction économique.

Ainsi, sous la condition qu'au moins un programme optimal x^* du problème (3.38) vérifie $(Ax^*)_i < b_i$ (i.e. la ressource i n'est pas déficitaire), on a $p_i^* = 0$ pour toute solution p^* du dual, et la ressource i n'est déficitaire pour aucun autre programme optimal $\bar{x}$.

L'interprétation décrite explique le nom de *coûts duals* qu'on donne souvent aux coordonnées de la solution $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ du problème dual.

2. Dans ce paragraphe, on étudiera le concept des coûts duals en termes des problèmes (3.2) et (3.4).

Les résultats obtenus subsistent, on le conçoit, pour tout problème de programmation linéaire.

On ne comprendra jusqu'au bout la relation entre le maximum de $\langle c, x\rangle$ et le vecteur b second membre des contraintes de (3.2) que si l'on introduit les fonctions suivantes.

On notera $d = F(b)$ la valeur de (3.2).

On écrira $d = f(b, c)$ si l'on veut mettre en relief la dépendance de d vis-à-vis du vecteur c.

Prenons les ensembles

$$B = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \text{il existe } x \in \mathbf{R}^n,\ z \geqslant Ax\},$$
$$C = \{w \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } p \in \mathbf{R}^m,\ p \geqslant 0,\ w = A'p\}.$$

Le théorème de dualité implique de suite que la fonction $f(b, c)$ a pour domaine de définition

$$B \times C = \{(z, w) \mid z \in B,\ w \in C\}.$$

En effet, si $(b, c) \notin B \times C$, i.e. ou bien $b \notin B$, ou bien $c \notin C$, alors au moins l'un des problèmes en dualité (3.2) et (3.4) n'a évidemment pas de sens. En vertu du théorème 3.4, le problème (3.2) est impossible, i.e. la fonction f n'est pas définie pour le couple (b, c).

Inversement, si $(b, c) \in B \times C$, il est clair que les ensembles admissibles des deux problèmes ne sont pas vides, d'où, par le théorème de dualité, l'existence d'une solution à (3.2), si bien que $f(b, c)$ est définie.

Il se peut des fois que (b, c) soit un point frontière de l'ensemble $B \times C$, ce qui fait qu'une petite variation de b ou c risque d'entraîner l'impossibilité de (3.2).

On étudie le comportement de la fonction $f(b, c)$ partout dans un voisinage du point donné (b, c) et on fait l'hypothèse que ce point ne se trouve pas sur la frontière de $B \times C$, i.e. il est un point intérieur à cet ensemble.

On illustre cette condition par

EXEMPLE.

$$\max\ (c_1x_1 + c_2x_2)$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant b_1, \quad 3x_1 + x_2 \leqslant b_2, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{3.40}$$

L'ensemble B est ici défini par l'égalité

$$B = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \geqslant x_1 + 2x_2,\ z_2 \geqslant 3x_1 + x_2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}.$$

Autrement dit, le point (z_1, z_2) est élément de B s'il y a (x_1, x_2) tel que

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad z_1 \geqslant x_1 + 2x_2, \quad z_2 \geqslant 3x_1 + x_2.$$

On en déduit aisément que $B = \mathbf{R}^2_+$ dans notre cas car les conditions $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ entraînent $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$ si $(z_1, z_2) \in B$. D'autre part, si $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$, alors $(z_1, z_2) \in B$ parce qu'on prend pour (x_1, x_2) le vecteur $(0, 0)$. Aussi $b = (b_1, b_2)$ est un vecteur frontière pour B si et seulement si $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$ et l'un des nombres b_1, b_2 vaut 0.

On montre également que le vecteur $c = (c_1, c_2)$ appartient à la frontière de C si et seulement si c est colinéaire à $(1, 2)$ où à (3.1), vecteurs-lignes de la matrice A.

THÉOREME 3.6. *La fonction $f(b, c)$ est positivement homogène du premier degré en chaque argument b et c,* i.e.

$$f(\lambda b, c) = \lambda f(b, c), \quad f(b, \lambda c) = \lambda f(b, c)$$

pour tout $\lambda \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION. Soit deux problèmes

$$\begin{aligned} &\max \langle c, x\rangle \\ &Ax \leqslant \lambda b, \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} &\min \langle \lambda b, p\rangle \\ &A'p = c, \ p \geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.42}$$

et soit x^* une solution quelconque de (3.2), i.e. $\langle c, x^*\rangle = f(b, c)$. Alors λx^* est un vecteur réalisable de (3.41) : $Ax^* \leqslant b \Rightarrow A(\lambda x^*) \leqslant \lambda b$ parce que $\lambda \geqslant 0$. On montre que λx^* est une solution de (3.41). Soit p^* une solution du problème (3.4), auquel cas p^* est un vecteur réalisable de (3.42). Le théorème de dualité faisant que $\langle c, x^*\rangle = \langle b, p^*\rangle$, on a $\langle c, \lambda x^*\rangle = \langle \lambda b, p^*\rangle$, d'où λx^* est une solution de (3.41) (lemme 3.2). Par conséquent, $f(\lambda b, c) = \langle c, \lambda x^*\rangle = \lambda \langle c, x^*\rangle = \lambda f(b, c)$. L'homogénéité en c se démontre de façon analogue.

DÉFINITION 3.1. Une fonction $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie sur un ensemble convexe $X \subseteq \mathbf{R}^n$ est dite *convexe* si l'on a pour deux vecteurs x^1, x^2 quelconques de X et tout nombre α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\varphi(\alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2) \leqslant \alpha\varphi(x^1) + (1 - \alpha)\varphi(x^2).$$

On explicite cette notion sur l'exemple de la fonction d'une variable.

Le point $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$ appartient au segment $[x^1, x^2]$, et si α varie de 1 à 0, x parcourt le segment tout entier.

Considérons la droite passant par les points $(x^1, \varphi(x^1))$, $(x^2, \varphi(x^2))$ du plan. Son équation est

$$\frac{y - \varphi(x^1)}{x - x^1} = \frac{y - \varphi(x^2)}{x - x^2}.$$

On y porte l'expression de x par les extrémités x^1, x^2 du segment, il vient $y(x) = \alpha\varphi(x^1) + (1-\alpha)\varphi(x^2)$. D'où l'interprétation géométrique de la notion de fonction convexe : la courbe représentative est située au-dessous de la corde sous-tendant ses deux points quelconques (fig. 3.2). Un exemple typique de fonction convexe est la fonction de n variables $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$ (voir exer. 19).

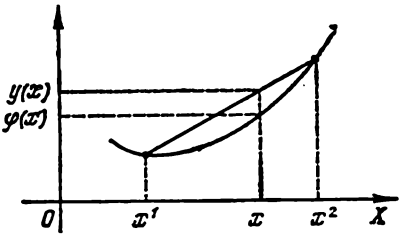


Fig. 3.2.

La notion de fonction concave est une sorte de duale de celle de la fonction convexe.

Définition 3.2. Une fonction $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie sur l'ensemble convexe $X \subseteq \mathbf{R}^n$ est dite *concave* si l'on a $\varphi(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geqslant \alpha\varphi(x^1) + (1-\alpha)\varphi(x^2)$ pour x^1, x^2 quelconques de X et tout nombre α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

La fonction $\sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$ est par exemple concave.

Théorème 3.7. *La fonction $f(b, c)$ est concave en b et convexe en c.*

Démonstration. On démontre la première affirmation. Soit $b^1, b^2 \in B$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. On vérifie l'inégalité $f(\alpha b^1 + (1-\alpha)b^2, c) \geqslant \alpha f(b^1, c) + (1-\alpha) f(b^2, c)$. Si x^* est une solution du problème (3.2) lorsqu'on prend pour b le vecteur b^1, et $\bar{x}$ son autre solution pour $b = b^2$, alors $f(b^1, c) = \langle c, x^*\rangle$, $f(b^2, c) = \langle c, \bar{x}\rangle$. Prenons le vecteur $\tilde{x} = \alpha x^* + (1-\alpha)\bar{x}$. Comme

$$A\tilde{x} = \alpha A x^* + (1-\alpha) A\bar{x} \leqslant \alpha b^1 + (1-\alpha) b^2,$$

tout $\tilde{x}$ est un vecteur réalisable de (3.2), où b est $\alpha b^1 + (1-\alpha) b^2$. Dans ce cas,

$$f(\alpha b^1 + (1-\alpha) b^2, c) \geqslant \langle c, \tilde{x}\rangle = \alpha\langle c, x^*\rangle + (1-\alpha)\langle c, \bar{x}\rangle = \\ = \alpha f(b^1, c) + (1-\alpha) f(b^2, c).$$

On opère de même en ce qui concerne la propriété de f d'être convexe en c.

Dans la suite de ce paragraphe, seule nous intéressera la relation entre la valeur d du problème (3.2) et le vecteur b, et l'on utilisera donc la notation $d = F(b)$.

S'agissant de $F(b)$, les théorèmes 3.6 et 3.7 s'énoncent comme suit:

$F(b)$ est positivement homogène du premier degré, i.e. $F(\lambda b) = \lambda F(b)$ pour $\lambda \geqslant 0$;

$F(b)$ est concave sur son domaine de définition B convexe.

La théorie de l'analyse convexe apprend qu'une fonction concave est continue à l'intérieur de son domaine de définition. Démontrons-le pour $F(b)$.

Soit P^0 l'ensemble des solutions du problème (3.4)

$$\begin{aligned} &\min \langle b, p\rangle \\ &A'p = c, \ p \geqslant 0. \end{aligned}$$

On modifie la fonction économique:

$$\begin{aligned} &\min \langle b + \Delta b, p\rangle \\ &A'p = c, \ p \geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

avec $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, \ldots, \Delta b_m)$ l'accroissement du vecteur b et on désigne par P^0_Δ l'homologue de P^0.

Lemme 3.5. *Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait pour tout Δb, $\| \Delta b \| < \varepsilon$, l'inclusion $P^0_\Delta \subseteq P^0$ qui signifie que toute solution du problème* (3.43) *en est une de* (3.4).

Démonstration. L'ensemble admissible P de (3.4) (qui est en même temps celui de (3.43)) est un ensemble polyédrique convexe. Ses points extrêmes sont donc en nombre fini. Soient $p^1, p^2, \ldots, p^k$ tous les extrêmes de P.

On suppose que l premiers de ces points sont autant d'optimums du problème (3.4), i.e. $d = \min\limits_{p \in P} \langle b, p\rangle = \langle b, p^i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, l$; $d < \langle b, p^i\rangle$, $i = l + 1, \ldots, k$. On introduit la notation $\delta = \min\limits_{l+1 \leqslant j \leqslant k} \langle b, p^j\rangle$. On a $d < \delta$. On pose $Q = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant l} \| p^i \|$. On prend en qualité de ε du lemme 3.5 le nombre $\varepsilon = (\delta - d)/2Q$.

En effet, soit $\| \Delta b \| < \varepsilon$. On montre que

$$\langle b + \Delta b, p^i\rangle < \langle b + \Delta b, p^j\rangle, \tag{3.44}$$

où $1 \leqslant i \leqslant l$, $l + 1 \leqslant j \leqslant k$. Il en résulte que parmi les points extrêmes de l'ensemble polyédrique convexe P, seuls optimisent (3.43) les points qui sont optimaux pour le problème (3.4). Avec l'affirmation du théorème 3.2, on en tire le résultat voulu.

On note que

$$|\langle \Delta b, p^i\rangle| \leqslant \|\Delta b\| \, \|p^i\| \leqslant Q \, \|\Delta b\| < \varepsilon Q$$

quels que soient i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

On démontre l'inégalité (3.44) en regroupant ses termes:

$$\langle b, p^j\rangle - \langle b, p^i\rangle > \langle \Delta b, p^i\rangle - \langle \Delta b, p^j\rangle.$$

Mais

$$\langle b, p^j\rangle - \langle b, p^i\rangle = \langle b, p^j\rangle - d \geqslant \delta - d$$

et

$$\langle \Delta b, p^i\rangle - \langle \Delta b, p^j\rangle \leqslant \|\Delta b\| \, \|p^i\| + \|\Delta b\| \, \|p^j\| \leqslant$$
$$\leqslant 2Q \, \|\Delta b\| < 2Q\varepsilon = \delta - d.$$

Les inégalités obtenues démontrent le lemme.

THÉORÈME 3.8. *La fonction $F(b)$ est continue dans son domaine de définition.*

DÉMONSTRATION. Soit Δb un vecteur suffisamment petit, et le vecteur $b + \Delta b$ est élément de B, domaine de définition de F.

Le problème (3.4) étant possible par hypothèse, on a $c \in C$, si bien que le problème (3.43) admet lui aussi une solution p^*. L'accroissement Δb est petit, et p^* est donc une solution de (3.4) (lemme 3.5). Selon le théorème de dualité, $F(b) = \langle b, p^*\rangle$, $F(b + \Delta b) = \langle b + \Delta b, p^*\rangle$, d'où $F(b - \Delta b) - F(b) = \langle \Delta b, p^*\rangle$. Si l'on fait tendre Δb vers 0 et si le problème dual admet plus d'une solution, alors le point extrême p^* peut être fonction de Δb: $p^* = p^*(\Delta b)$, avec $p^*(\Delta b)$ un des extrêmes $p^1, p^2, \ldots, p^k$. Dans ce cas,

$$|F(b + \Delta b) - F(b)| = |\langle \Delta b, p^*(\Delta b)\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Delta b\| \, \|p^*(\Delta b)\| \leqslant Q \, \|\Delta b\|,$$

où Q est, on le rappelle, égal à $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \|p^i\|$. Il existe donc $\lim\limits_{\Delta b \to 0} (F(b + \Delta b) - F(b)) = 0$, i.e. la fonction F est continue en $b \in B$.

3. Prenons un cas concret, à savoir le problème de programmation linéaire (3.40). La propriété d'homogénéité de $F(b)$ nous évite des dessins compliqués. On considère b appartenant à l'hyperplan $b_1 = 4$. Si le vecteur $b = (b_1, b_2, b_3)$ est tel que $b_1 > 0$, $b_1 \neq 4$, on prend le nombre $\lambda = 4/b_1$ et le vecteur $\lambda b = (4, 4b_2/b_1, 4b_3/b_1)$. Le théorème 3.6 fait que $F(b) = (1/\lambda) F(\lambda b)$. On détermine donc aisément $F(b)$ connaissant ses valeurs dans l'hyperplan $b_1 = 4$.

Ainsi, on énonce le problème

$$\max (2x_1 + 3x_2) \tag{3.45}$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \quad 3x_1 + x_2 \leqslant b_2, \quad x_1 + x_2 \leqslant b_3,$$

les nombres b_2, b_3 étant supposés positifs.

Dans ce problème, les seuls points extrêmes de l'ensemble admissible X sont les solutions des systèmes d'équations

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 3x_1 + x_2 = b_2, \end{cases} \Rightarrow x^1 = \left(\frac{2b_2 - 4}{5}, \frac{12 - b_2}{5}\right);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = b_3, \end{cases} \Rightarrow x^2 = (2b_3 - 4, 4 - b_3);$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = b_2, \\ x_1 + x_2 = b_3, \end{cases} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{b_2 - b_3}{2}, \frac{3b_3 - b_2}{2}\right).$$

Ainsi, X possède au plus trois points extrêmes.

Le point x^1 est un extrême de X s'il vérifie l'inégalité $x_1 + x_2 \leqslant b_3$, i.e. $(2b_2 - 4)/5 + (12 - b_2)/5 \leqslant b_3$, ou $-b_2 + 5b_3 \geqslant 8$. De

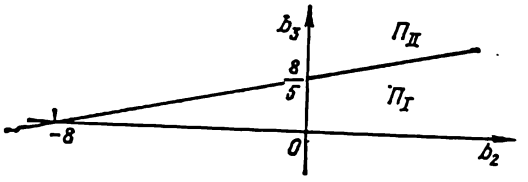


Fig. 3.3.

même, x^2 est un point extrême si l'on a $3x_1 + x_2 \leqslant b_2$ ou $3(2b_3 - 4) + (4 - b_3) \leqslant b_2$, i.e. $-b_2 + 5b_3 \leqslant 8$. Enfin, x^3 jouit de la même propriété si $-b_2 + 5b_2 \leqslant 8$.

La droite $-b_2 + 5b_3 = 8$ partage en deux l'ensemble des points du plan de coordonnées b_2Ob_3 (fig. 3.3). Les domaines correspondants sont Π_I et Π_{II}. On a $-b_2 + 5b_3 < 8$ dans Π_I et $-b_2 + 5b_3 > 8$ dans Π_{II}.

Les raisonnements antérieurs entraînent que si $(b_2, b_3) \in \Pi_I$, les points extrêmes sont x^2 et x^3 et que si $(b_2, b_3) \in \Pi_{II}$, il y a un seul extrême x^1. Dans le cas où (b_2, b_3) est sur la droite $-b_2 + 5b_3 = 8$, les trois points extrêmes se confondent.

Il est donc clair que la solution dans Π_{II} est le point x^1, si bien que $F(b) = \langle c, x^1 \rangle = (b_2 + 28)/5$.

Pour trouver l'optimum dans le domaine Π_I, il faut comparer la valeur de la fonction économique aux points extrêmes x^2, x^3: $\langle c, x^2 \rangle = b_3 + 4$, $\langle c, x^3 \rangle = (-b_2 + 7b_3)/2$.

Comme $-b_2 + 5b_3 < 8$ dans Π_I, on a $b_3 + 4 > (-b_2 + 7b)/2$, i.e. $\langle c, x^2 \rangle > \langle c, x^3 \rangle$, donc le point x^2 optimise le problème et $F(b) = \langle c, x^2 \rangle = b_3 + 4$.

Ainsi,

$$F(b) = \begin{cases} (b_2 + 28)/5 & \text{pour } b \in \Pi_{II}, \\ b_3 + 4 & \text{pour } b \in \Pi_I. \end{cases}$$

Les deux valeurs de $F(b)$ coïncident sur la droite $-b_2 + 5b_3 = 8$ parce que F est continue partout, comme il fallait s'y attendre.

Voyons les propriétés de dérivabilité de la fonction $F(b)$.

$F(b)$ de notre exemple est, on le voit, dérivable partout à l'intérieur des domaines Π_{I} et Π_{II}:

$$\frac{\partial F}{\partial b_2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b_3} = 1 \text{ dans } \Pi_{\mathrm{I}};$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{\partial F}{\partial b_3} = 0 \text{ dans } \Pi_{\mathrm{II}}.$$

Autrement dit, c'est la troisième ressource qui est déficitaire dans Π_{I} et la deuxième dans Π_{II}.

La fonction $F(b)$ n'est dérivable en aucun point $b^0 = (b_2^0, b_3^0)$ de la droite $-b_2 + 5b_3 = 8$. En effet, on a

$$\lim_{b_2 \to b_2^0} \frac{\partial F}{\partial b_2} = 0, \quad \lim_{b_3 \to b_3^0} \frac{\partial F}{\partial b_3} = 1$$

ou

$$\lim_{b_2 \to b_2^0} \frac{\partial F}{\partial b_2} = \frac{1}{5}, \qquad \lim_{b_3 \to b_3^0} \frac{\partial F}{\partial b_3} = 0$$

selon que le point (b_2, b_3) s'approche de la droite à partir de Π_{I} ou de Π_{II}.

Ainsi, aucune $\lim\limits_{b_i \to b_3^0} \dfrac{\partial F}{\partial b_i}$ n'existe, i.e. la fonction $F(b)$ n'admet pas de dérivées au point (b_2^0, b_3^0).

Le lecteur établira sans peine l'unicité pour le dual de (3.45) si le point (b_2, b_3) n'est pas sur la droite $-b_2 + 5b_3 = 8$ et la non-unicité dans le cas contraire.

4. Il se trouve que la propriété de dérivabilité de $F(b)$ dépend de la structure de l'ensemble des solutions du problème dual.

THÉORÈME 3.9. *Si le problème dual* (3.4) *possède une solution* p^* *unique, alors la fonction* F *du problème* (3.2) *est dérivable au point* b *et* $\partial F(b)/\partial b_i = p_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, m$, i.e. grad $F(b) = p^*$.

La démonstration découle de suite des raisonnements du théorème précédent. En effet, si la solution p^* du problème dual est unique, alors la formule $F(b + \Delta b) = F(b) + \langle \Delta b, p^* \rangle$ est satisfaite pour tous les accroissements Δb suffisamment faibles. Cette égalité signifie que F est linéaire au voisinage de b et que son gradient en b est égal à p^*.

S'il y a non-unicité pour le dual (3.4), la situation est un peu plus compliquée encore que les points extrêmes de l'ensemble polyédrique des solutions caractérisent toujours la propriété de dérivabilité de $F(b)$.

Avant de formuler le résultat qui s'impose, on explique la non-unicité du problème dual. Prenons les exemples suivants:

$$\begin{array}{ll} \max\,(2x_1 + 3x_2) & \min\,(4p_1 + 6p_2) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, & p_1 + 3p_2 = 2, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6. & 2p_1 + p_2 = 3, \\ & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Dans le cas dual, il y a unicité (fig. 3.4): $p^0 = (7/5,\ 1/5)$.

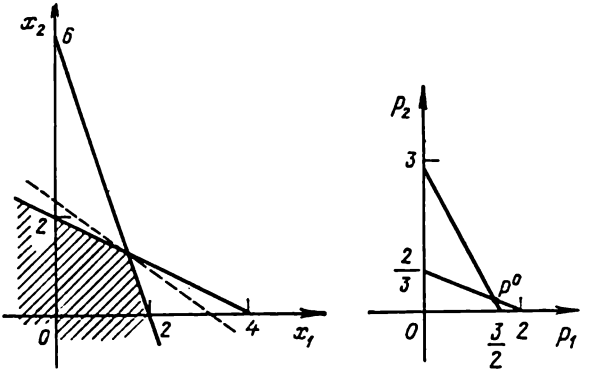


Fig. 3.4.

On complète le problème direct par une contrainte:

$$\begin{array}{ll} \max\,(2x_1 + 3x_2) & \min\,(4p_1 + 6p_2 + \frac{14}{5}p_3) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, & p_1 + 3p_2 + p_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6, & 2p_1 + p_2 + p_3 = 3, \\ x_1 + x_2 \leqslant \frac{14}{5}. & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0,\ p_3 \geqslant 0. \end{array}$$

Il y a toujours unicité pour le primal (fig. 3.5): $x^* = (8/5,\ 6/5)$, et l'ensemble des solutions du dual constitue un segment d'extrémités $p^* = (7/5,\ 1/5,\ 0)$, $\bar{p} = (1,\ 0,\ 1)$ (fig. 3.6).

Il est clair qu'avec la contrainte additionnelle, la solution unique p^0 du problème initial est devenue tout un segment. Il en est de même pour le cas général.

Soient X^0 et P^0 les ensembles des solutions de (3.2) et (3.4) respectivement.

On dira que la contrainte $\langle a_i,\ x\rangle \leqslant b_i$ est *essentielle* pour le problème (3.2) si tout $x^* \in X^0$ satisfait à $\langle a_i,\ x^*\rangle = b_i$, i.e. l'hyperplan $\langle a_i,\ x\rangle = b_i$ contient X^0.

On complète les contraintes de (3.2) par plusieurs contraintes essentielles: $\langle a_s, x\rangle \leqslant b_s$, $s = m + 1, \ldots, l$, conséquences des anciennes contraintes.

Le problème dual prend la forme:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m} b_i p_i + \sum_{s=m+1}^{l} b_s p_s\right)$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_i + \sum_{s=m+1}^{l} p_s a_s = c, \quad p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{3.46}$$

Les nouvelles contraintes de (3.2) étant conséquences des contraintes anciennes et essentielles, on déduit facilement du théorème

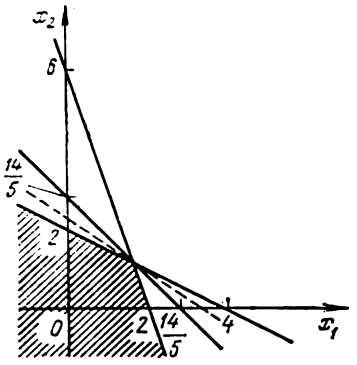


Fig. 3.5.

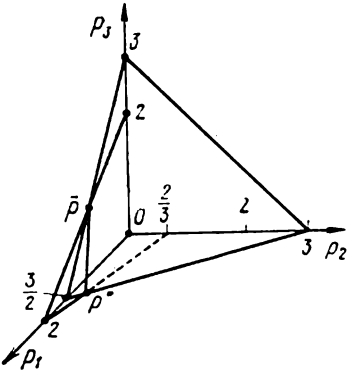


Fig. 3.6.

2.27 l'existence des nombres non négatifs λ_{is}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $s = m + 1, \ldots, l$, tels que

$$a_s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} a_i, \qquad b_s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} b_i.$$

Etant données les égalités

$$\sum_{i=1}^{m} b_i p_i + \sum_{s=m+1}^{l} b_s p_s = \sum_{i=1}^{m} b_i p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} b_i\right) p_s =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} b_i \left(p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \lambda_{is} p_s\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_i + \sum_{s=m+1}^{l} p_s a_s = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i + \sum_{s=m+1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} a_i\right) p_s =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \left(p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \lambda_{is} p_s\right)$$

et la notation

$$\bar{p}_i = p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \lambda_{is} p_s, \tag{3.47}$$

le problème dual (3.46) se récrit

$$\min \langle b, \bar{p} \rangle$$
$$A'p = c, \ \bar{p} \geqslant 0,$$

i.e. on retrouve évidemment le problème (3.4).

Il correspond donc à toute solution $\bar{p}$ de (3.4) autant de solutions de (3.46) que le système d'équations (3.47) possède de solutions non négatives. On conçoit de plus que, les points extrêmes de l'ensemble des solutions de (3.46) s'obtiennent comme suit: on prend pour le vecteur $\bar{p}$ de (3.47) le point extrême p^0 de l'ensemble polyédrique P^0 et on cherche les solutions non négatives extrêmes du système.

Ainsi, la non-unicité pour le problème dual (3.46) tient à l'existence des contraintes « superflues » du primal (3.2), qui en contiennent toutes les solutions.

Voyons les propriétés de dérivabilité de la fonction $F(b)$ s'il y a non-unicité pour (3.4).

Soit $\{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$ l'ensemble des points extrêmes de l'ensemble polyédrique convexe P^0.

Soit, dans $\mathbf{R}^m$, les cônes convexes

$$K_r = \{s \in \mathbf{R}^m \mid \langle s, p^r \rangle - \langle s, p^i \rangle \leqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

pour tout $r = 1, 2, \ldots, k$.

Il est clair que chaque K_r n'est pas vide: $b \in K_r$, $r = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, parce que $\langle b, p^r \rangle = d = \langle b, p^i \rangle$.

Lemme 3.6. *La réunion des cônes K_r, $r = 1, 2, \ldots, k$, est égale à l'espace $\mathbf{R}^m$ tout entier:* $\bigcup_{r=1}^{k} K_r = \mathbf{R}^m$.

Démonstration. Soit $s \in \mathbf{R}^m$ et r un indice tel que $\langle s, p^r \rangle = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle s, p^i \rangle$. Evidemment, $s \in K_r$.

Théorème 3.10. *Soit $s \in \mathbf{R}^m$, $\| s \| = 1$, un vecteur qui définit une direction au point b, $s \in K_r$. Le nombre $\langle s, p^r \rangle$ est la dérivée de la fonction F en b dans la direction s.*

Démonstration. Soit $\Delta b = \lambda s$, $\lambda \geqslant 0$, suffissamment petit. Dans ce cas, l'ensemble des solutions du problème (3.43) est contenu dans P^0. Mais $\langle b + \Delta b, p^r \rangle \leqslant \langle b + \Delta b, p^i \rangle$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$. En effet, on a $\langle s, p^r \rangle \leqslant \langle s, p^i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$, par définition de K_r, si bien que $\langle \Delta b, p^r \rangle = \langle \lambda s, p^r \rangle \leqslant \langle \lambda s, p^i \rangle = \langle \Delta b, p^i \rangle$. Quels que soient $\lambda \geqslant 0$ suffisamment petits, le point p^r est donc une solution du problème (3.43), où $\Delta b = \lambda s$. On en déduit, comme pour le théorème 3.8, $F(b + \lambda s) - F(b) = \langle \lambda s, p^r \rangle$, avec $\lambda \geqslant 0$ un nombre

assez faible. Alors

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(b+\lambda s) - F(b)}{\lambda} = \langle s, p^r \rangle.$$

CONSÉQUENCE 1. *On suppose qu'au moins une solution p^* du problème dual* (3.4) *vérifie $p_i^* = 0$. Si l'on modifie la coordonnée b_i du vecteur b tout en maintenant constantes les valeurs des autres coordonnées, alors on n'arrive pas à augmenter le maximum $F(b)$ de la fonction économique $\langle c, x \rangle$ du problème* (3.2).

En effet, la dérivée de F dans la direction $s = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, avec le nombre 1 occupant la place de la i-ième coordonnée, est nulle. Soit $s \in K_r$, auquel cas

$$p_i^r = \langle s, p^r \rangle \leqslant \langle s, p^* \rangle = p_i^* = 0.$$

CONSÉQUENCE 2. *Soit s, $\| s \| = 1$, un vecteur. On a*

$$\frac{\partial F(b)}{\partial s} = \min_{1 \leqslant r \leqslant k} \langle s, p^r \rangle.$$

En effet, si $s \in K_r$, alors $\partial F(b)/\partial s = \langle s, p^r \rangle$. Selon la définition du cône K_r, $\langle s, p^r \rangle \leqslant \langle s, p^i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Exercices

On abrège les notations en désignant le problème (3.2) par P (b, c) et le problème dual (3.4) par D (b, c).

1. Démontrer que si $A \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et la matrice A n'a pas de colonnes nulles, alors le problème

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0$$

est possible.

2. Vérifier que le problème P $(0, c)$ peut, ou bien posséder une solution $x = 0$ ou bien être impossible.

3. Montrer que si le problème P (b, c) admet une solution et $b' \geqslant b$, alors le problème P (b', c) est possible.

4. Résoudre le problème

$$\min (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n)$$
$$x_1 \geqslant 1, \ x_1 + x_2 \geqslant 2 \ \ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3 \ \ \ldots, \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n,$$
$$x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

5. Décrire toutes les solutions du problème

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

où b, $a_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Montrer que si les nombres $b\frac{c_j}{a_j}$ sont distincts, il y a unicité.

6. Trouver les valeurs de λ et μ pour lesquelles le programme $x^0 = (0, 4)$

est une solution du problème

$$\max\ (x_1 + 3\lambda x_2)$$
$$-\mu x_1 - x_2 \leqslant -4, \quad 2x_1 - x_2 \leqslant 2, \quad 3\mu x_1 - x_2 \leqslant 8.$$

7. Démontrer que l'équation $\langle c, x\rangle = d$ est une conséquence du système $Ax = b$ si et seulement s'il existe un vecteur p tel que $c = A'p$, $d = \langle b, p\rangle$.

8. Démontrer que le problème

$$\max\ \langle c, x\rangle$$
$$Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0.$$

est possible pour tout $b \in \mathbf{R}^m$ et tout $c \in \mathbf{R}^n$ si et seulement si l'on trouve $x^0 \in \mathbf{R}^n$ et $p^0 \in \mathbf{R}^m$ tels que

$$Ax^0 < 0, \quad A'p^0 > 0, \quad p^0 \geqslant 0, \quad x^0 \geqslant 0.$$

9. Soit x^0 un point frontière du polyèdre $X = \{x \mid Ax \leqslant b\}$ i.e. il existe une ligne $a_i \neq 0$ de la matrice A pour laquelle $\langle a_i, x^0\rangle = b_i$. Démontrer l'existence d'un vecteur $c \neq 0$ tel que x^0 soit une solution du problème P (b, c).

10. On associe au point frontière x^0 du polyèdre X l'ensemble C_{x^0} de tous les vecteurs c tels que x^0 soit une solution de P (b, c):

$$C_{x^0} = \{c \mid \langle c, x^0\rangle \geqslant \langle c, x\rangle \ \forall\, x \in X\}.$$

Prouver que C_{x^0} est un cône convexe.

11. Démontrer la convexité de l'ensemble B_c de tous les vecteurs b pour lesquels le problème P (b, c) est possible.

12. On suppose que s est un vecteur, $\lambda > 0$ et les problèmes P (b, c) et P $(b + \lambda s, c)$ sont possibles. Démontrer qu'il en est de même du problème P $(b + \mu s, c)$, avec $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$. INDICATION. Utiliser l'exer. 11.

On dira qu'une direction s ($s \in \mathbf{R}^n$, $\|s\| = 1$) de variation du vecteur b est *possible* pour le problème P (b, c) si P $(b + \lambda s, c)$ possède une solution pour $\lambda \geqslant 0$ suffisamment petits (i.e. il existe $\partial F(b)/\partial s$).

13. Montrer que s'agissant du problème P (b, c), toute directoin s de variation de b est possible si et seulement si cette propriété est juste pour $s^0 = -m^{1/2} e$, avec $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$.

14. Démontrer qu'une direction s est possible pour P (b, c) si et seulement si tout $p \in K^{\Gamma 0}$ (où $K^{\Gamma 0} = \{p \mid p \geqslant 0, A'p = 0, \langle b, p\rangle = 0\}$) vérifie $\langle s, p\rangle \geqslant 0$.

15. Démontrer que toute direction de variation du vecteur b est possible pour le problème P (b, c) si et seulement si l'ensemble P^0 des solutions du problème D (b, c) est borné. INDICATION. Utiliser l'exer. 14 en posant $s = \pm v^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, où v^i est le i-ième vecteur unité de l'espace $\mathbf{R}^m$.

16. Démontrer que si une direction s est possible pour le problème P (b, c), alors $\partial F(b)/\partial s = \min\limits_{p \in P^0} \langle s, p\rangle$. INDICATION. Utiliser l'exer. 14 et la conséquence 1 du théorème 3.10.

On appelle *dérivée partielle à droite* de la fonction $F(b)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, et on note $\partial F^+/\partial b_i$, la dérivée $\partial F(b)/\partial v^i$ dans la direction du i-ième vecteur unité v^i de l'espace $\mathbf{R}^m$, et la quantité $-\partial F(b)/\partial(-v^i)$ est la *dérivée partielle à gauche* notée $\partial F^-/\partial b_i$.

17. Montrer que si la dérivée $\partial F^-/\partial b_i$ existe pour le problème P (b, c) et $p = (p_1, p_2, \ldots p_m)$ est une solution quelconque de D (b, c), alors

$$\frac{\partial F^+}{\partial b_i} \leqslant p_i \leqslant \frac{\partial F^-}{\partial b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

18. Démontrer que si le problème

$$\max\ \langle c, x\rangle$$
$$Ax = b$$

est possible, alors tout vecteur réalisable est optimal.

19. Vérifier la convexité de la fonction $x_1^2 + x_2^2$ et la concavité de $\sqrt{x_1 + x_2}$.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE LA DUALITÉ

La théorie de la dualité construite dans le chapitre III est un outil efficace dans l'étude qualitative des programmes linéaires. Elle intervient dans de nombreuses applications des plus différentes. Le lecteur en trouvera quelques exemples ci-dessous.

§ 1. Théorème fondamental des jeux matriciels

Parmi les modèles mathématiques du problème de prise de décision en présence d'incertain, le modèle de jeu à 2 personnes est l'un des plus utilisés. La théorie des jeux est provenue des jeux de société (jeux aux cartes, échecs, roulette, ...), mais elle devra jouer plus tard un rôle important en économie, dans le domaine militaire et dans d'autres sphères de la vie sociale.

Avant d'introduire des notions fondamentales, on décrit un jeu simple à 2 personnes.

Le jeu se joue comme suit : chacun des joueurs choisit le nombre 1 ou 2 tout en cherchant à deviner le choix de l'adversaire. S'ils ont vu juste les deux ou s'ils se sont trompés, la partie est considérée comme nulle, et si c'est seulement l'un d'eux qui a pénétré les intentions de l'autre, son gain est égal à la somme de deux nombres choisis.

Décrivons le jeu en langage formel.

On appelle *stratégie d'un joueur* le couple de nombres (s, t) qui peuvent être 1 ou 2, s étant le nombre choisi et t le choix présumé de l'adversaire. Ainsi, chaque joueur possède quatre stratégies: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2).

Toute l'information sur les règles du jeu est résumée par le tableau de la page 96.

Les éléments de la matrice représentent le gain de A. Si A choisit, par exemple (2, 2) et B adopte (2, 1), alors le gain du premier est égal à 4. Par contre, si A choisit (1, 2) et le choix de B porte sur (1, 1), alors A verse 2 (i.e. il reçoit —2).

Ce jeu a ceci de particulier que chaque joueur dispose d'un ensemble fini de stratégies. De tels jeux sont dits *matriciels*.

Joueur B

		(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
Joueur A	(1, 1)	0	2	—3	0
	(1, 2)	—2	0	0	3
	(2, 1)	3	0	0	—4
	(2, 2)	0	—3	4	0

Décrivons un jeu matriciel.

A possède m stratégies indicées par $i = 1, 2, \ldots, m$, et l'ensemble stratégique de B contient n éléments numérotés par les nombres $j = 1, 2, \ldots, n$. Si A choisit la stratégie i et B la stratégie j, alors le gain du premier est a_{ij} (c'est une perte pour $a_{ij} < 0$). La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

porte le nom de *matrice du jeu.*

Les échecs sont un exemple de jeu matriciel dont chaque participant dispose d'un très grand nombre de stratégies.

On désigne par $x = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^m$, le nombre 1 occupant la place i, la stratégie i de A et par $y = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, le nombre 1 étant à la place j, la stratégie j de B. On voit sans peine que l'issue du jeu, i.e. le gain de A, est

$$a_{ij} = \langle x, Ay \rangle = \langle A'x, y \rangle.$$

Il existe en théorie des jeux une règle présidant au choix des stratégies qui constitue le principe de résultat garanti. Selon cette règle, le joueur A raisonne comme suit : si j'applique la stratégie i_1, mon adversaire peut adopter j_1 telle que le nombre $a_{i_1 j_1}$ soit le plus petit des $a_{i_1 j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, i.e.

$$a_{i_1 j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i_1 j}.$$

B ignore en général le choix i_1 de A, et il adopte la stratégie j indépendamment de ce choix. Il se peut cependant qu'il joue précisément j_1, si bien qu'avec i_1 mal choisie, A peut subir une perte sensible. Dans notre exemple, si A opte pour $i_1 = 3$, i.e. la stratégie (2, 1), il risque de perdre 4 (à condition que B applique $j_1 = 4$, i.e. (2, 2)).

Il faut donc être prudent et adopter i_1 de façon que le nombre $a_{i_1 j_1} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i_1 j}$ soit le plus grand possible, i.e.

$$a_{i_1 j_1} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij}.$$

S'agissant du cas considéré,

$$a_{1j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{1j} = -3, \quad j_1 = 3,$$

$$a_{2j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{2j} = -2, \quad j_1 = 1,$$

$$a_{3j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{3j} = -4, \quad j_1 = 4,$$

$$a_{4j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{4j} = -3, \quad j_1 = 2.$$

Le joueur A fera preuve d'intelligence s'il choisit i_1 telle que

$$a_{i_1 j_1} = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} a_{ij_1} = \max\{-3, -2, -4, -3\}.$$

Il est clair qu'il faut prendre $i_1 = 2$; cela étant, $j_1 = 1$ et $a_{i_1 j_1} = -2$.

Ainsi, en choisissant $i_1 = 2$, i.e. la stratégie (1, 2), A est certain de perdre au plus 2.

Si l'on raisonne pour B, on conçoit que la stratégie j_2 à choisir doit être telle que le nombre

$$a_{i_2 j_2} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij_2}$$

soit aussi petit que possible, i.e.

$$a_{i_2 j_2} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij}.$$

Visiblement, $j_2 = 2$ (i.e. la stratégie (1, 2) comme celle de A), $i_2 = 1$, $a_{i_2 j_2} = 2$.

Par conséquent, B peut également être assuré de perdre au plus 2.

Le cas est, paraît-il, parfaitement clair : A a à adopter la stratégie $i_1 = 2$, B la stratégie $j_2 = 2$, et on aura la partie nulle car $a_{22} = 0$.

Or, la situation tient du paradoxe. En effet, la matrice du jeu est connue des deux joueurs, si bien que, disons, A peut penser non seulement pour lui-même, mais aussi pour son adversaire. En jugeant que B appliquera la stratégie $j_2 = 2$, il voudra jouer $i_1 = 1$ et gagnera donc 2. Si B raisonne de même, il abandonnera l'idée d'appliquer $j_2 = 2$. Cela peut durer éternellement sans qu'aucune décision soit prise.

Voyons le jeu de matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \\ -10 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

On calcule sans peine que

$$a_{i_1 j_1} = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{ij} = 4,$$

et $i_1 = 2$, $j_1 = 2$.

D'autre part,

$$a_{i_2 j_2} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} a_{ij} = 4,$$

et $i_2 = 2$, $j_2 = 2$.

Cela signifie que la stratégie $i = 2$ de A lui garantit un gain d'au moins 4 et que B peut garantir une perte d'au plus 4. Il est donc clair que les stratégies $i = 2$ et $j = 2$ sont optimales pour A et B respectivement. Ainsi, le jeu admet un couple stratégique mutuellement acceptable.

Deux exemples cités présentent entre eux les différences suivantes. Dans le premier cas, chaque joueur peut s'assurer le gain —2 et il espère obtenir plus, tandis que dans le second, chaque joueur garantit un résultat au moyen d'une stratégie, et aucune autre stratégie ne lui permet de garantir davantage. Pour savoir différencier ces deux situations dans le cas général, on introduit certaines notions.

DÉFINITION 4.1. On dira que le nombre

$$\underline{v} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij}$$

est la *valeur minimum* du jeu et que

$$\bar{v} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij}$$

en est la *valeur maximum*.

LEMME 4.1. $\underline{v} \leqslant \bar{v}$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \leqslant a_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

d'où

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Finalement,

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij}.$$

Dans le premier exemple, $\underline{v} = -2$, $\overline{v} = 2$, i.e. $\underline{v} < \overline{v}$; dans le second cas, $\underline{v} = \overline{v} = 4$.

DÉFINITION 4.2. Un jeu possède un *point selle* si $\underline{v} = \overline{v} = v$, où v est la *valeur du jeu*.

DÉFINITION 4.3. La stratégie i_0 du joueur A est dite *maximin* si

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i_0 j} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \underline{v}.$$

De même, la stratégie j_0 de B est dite *minimax* si

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{i j_0} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij} = \overline{v}.$$

Les deux stratégies sont de *bonnes stratégies*.

Visiblement, il existe toujours pour A et B une stratégie maximin et une stratégie minimax respectivement. Elles peuvent même être plusieurs pour chaque joueur.

THÉORÈME 4.1. *Un jeu matriciel a un point selle si et seulement si chaque couple* (i_0, j_0) *de bonnes stratégies vérifie l'inégalité*

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0 j_0} \leqslant a_{i_0 j} \tag{4.1}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$ *et tout* $j = 1, 2, \ldots, n$.

DÉMONSTRATION. Supposons que le jeu a un point selle, i.e. $\underline{v} = \overline{v} = v$, auquel cas

$$v = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i_0 j} \leqslant a_{i_0 j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

D'autre part,

$$v = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{i j_0} \geqslant a_{i j_0}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

d'où $a_{i_0 j_0} \leqslant v \leqslant a_{i_0 j_0}$, i.e. $v = a_{i_0 j_0}$, $a_{i j_0} \leqslant a_{i_0 j_0} \leqslant a_{i_0 j}$.

Inversement, soit (4.1). On a

$$\overline{v} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{i j_0} \leqslant a_{i_0 j_0}$$

et

$$v = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i_0 j} \geqslant a_{i_0 j_0},$$

i.e. $\overline{v} \leqslant \underline{v}$. Il est déjà connu que $\overline{v} \geqslant \underline{v}$, d'où $\overline{v} = \underline{v}$.

DÉFINITION 4.4. Si un jeu possède un point selle, alors tout couple (i_0, j_0) de bonnes stratégies constitue un *point selle*.

Fort des résultats obtenus, on dit que si le jeu possède un point selle (i_0, j_0), alors A et B se comporteront d'une manière intelligente en appliquant i_0 et j_0 respectivement. Si le point selle fait défaut, on est dans le doute sur la stratégie « intelligente ». L'un des pro-

moteurs de la théorie des jeux von Neumann a donc proposé d'élargir le concept de stratégie. Supposons qu'on joue un grand nombre de parties, si bien que tout joueur s'intéresse à son gain moyen à l'issue du jeu et non à ce qu'il gagne à la fin de chaque partie.

On appelle *stratégie mixte* du joueur A un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, où $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, dont la coordonnée x_i est assimilée à la probabilité (ou la fréquence) pour qu'on adopte la stratégie de numéro i. On note qu'un cas particulier d'une stratégie mixte est $x = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, avec 1 à une place i. Cela veut dire qu'on applique la stratégie i au cours de toutes les parties. Les stratégies ainsi définies sont dites *pures*.

On introduit de même la stratégie mixte $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, pour le joueur B.

La stratégie mixte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ consiste à choisir un vecteur x qui décrit la probabilité avec laquelle on utilisera dans chaque partie telle ou telle stratégie pure de A. Dans la suite, le choix de la stratégie pure sera confié à un dispositif qui l'effectuera au hasard compte tenu du vecteur x.

Même si le joueur B peut deviner la stratégie de A, il ne saurait prévoir son choix concret dans la partie donnée.

Si A adopte la stratégie mixte x et B la stratégie mixte y, la fréquence avec laquelle on applique le couple (i, j) de stratégies pures est $x_i y_j$, le gain de A étant a_{ij} ou $a_{ij} x_i y_j N$ selon qu'il s'agit d'une seule partie ou de N parties. A gagne donc au total à l'issue de N parties

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j N = N \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

et son gain moyen est

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \langle x, Ay \rangle. \tag{4.2}$$

En théorie des probabilités, le nombre $M(x, y)$ est connu sous le nom d'*espérance mathématique du gain* dans chaque partie si l'on applique les stratégies mixtes x et y.

Définition 4.5. On dit que le couple (x^0, y^0) de stratégies mixtes est un *point selle de la fonction* $M(x, y)$ si l'on a

$$M(x, y^0) \leqslant M(x^0, y^0) \leqslant M(x^0, y), \tag{4.3}$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j \tag{4.4}$$

quelles que soient les stratégies mixtes x et y de A et B respectivement.

Comme dans le cas où le jeu possède un point selle en stratégies pures, l'existence du couple (x^0, y^0), point selle en stratégies mixtes, signifie qu'avec la stratégie x^0, A est sûr de gagner $M(x^0, y^0)$. En effet, si B choisit tout y, le gain de A est au moins égal à $M(x^0, y^0)$ du moment que $M(x^0, y) \geqslant M(x^0, y^0)$. D'autre part, le fait d'adopter la stratégie y^0 garantit à B que A peut gagner au plus $M(x^0, y^0)$ (ce qui découle de la première inégalité (4.3)).

Ainsi, A et B agissent de façon intelligente s'ils choisissent, en présence du point selle (x^0, y^0), les stratégies respectives x^0 et y^0. On comprend donc l'intérêt spécial du théorème suivant de von Neumann qui légitime l'introduction des stratégies mixtes.

THÉORÈME 4.2. *Tout jeu matriciel possède un point selle en stratégies mixtes.*

LEMME 4.2. *Pour que le couple (x^0, y^0) de stratégies mixtes soit un point selle de la fonction $M(x, y)$, il faut et il suffit que*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^0 \leqslant M(x^0, y^0) \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^0 \tag{4.5}$$

quels que soient $i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, \ldots, n$.

DÉMONSTRATION. Soit (x^0, y^0) un point selle. L'inégalité (4.4) étant satisfaite pour toutes les stratégies mixtes x et y, on obtient (4.5) si l'on prend $x = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$; avec 1 à la place de la i-ième coordonnée, et $y = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, avec 1 à la place de la coordonnée j, et si on porte ces vecteurs dans (4.4).

Inversement, soit (x^0, y^0) un couple de stratégies vérifiant les inégalités (4.5) pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, \ldots, n$. On trouve le résultat du lemme si les relations (4.4) ont lieu pour tout x et tout y.

On note en premier lieu qu'on écrit comme suit les inégalités (4.4) avec l'opération de multiplication des matrices par un vecteur:

$$\langle x, Ay^0 \rangle \geqslant \langle x^0, Ay^0 \rangle \leqslant \langle A'x^0, y \rangle. \tag{4.6}$$

On a de même pour (4.5)

$$Ay^0 \leqslant v_m, \tag{4.7}$$

$$A'x^0 \geqslant v_n, \tag{4.8}$$

où le vecteur v_m de dimension m a toutes ses coordonnées $v = \langle x^0, Ay^0 \rangle$, et toutes les coordonnées de v_n de dimension n sont égales au même nombre $v = \langle A'x^0, y^0 \rangle$.

On multiplie (4.7) scalairement par le vecteur x (on rappelle que $x \geqslant 0$), il vient $\langle x, Ay^0 \rangle \leqslant \langle v_m, x \rangle$. Le nombre $\langle v_m, x \rangle = v$ car

$\langle v_m, x\rangle = v \sum_{i=1}^{m} x_i$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. On a $\langle x, Ay^0\rangle \leqslant v$. On trouve de même $\langle A'x^0, y\rangle \geqslant v$.

Quel est le sens intuitif du lemme démontré? Il est déjà connu que si le couple stratégique (x^0, y^0) constitue un point selle, alors x^0 est une bonne stratégie contre l'ensemble des stratégies mixtes de B. Le lemme 4.2 dit qu'il suffit que x^0 soit une bonne stratégie contre l'ensemble des stratégies pures de B. Il en est de même de y^0.

La matrice du jeu A peut être une matrice $m \times n$ quelconque. Il y a cependant des cas où l'on l'assujettit à être positive. On a notamment un résultat simple qui s'énonce sous forme de

LEMME 4.3. *Soit a un nombre quelconque et $\bar{A}$ une matrice d'éléments $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + a$. On suppose que le couple (x^0, y^0) est un point selle du jeu de matrice A. Ce couple de stratégies mixtes constitue un point selle du jeu de matrice $\bar{A}$.*

DÉMONSTRATION. On désigne par $\bar{M}(x, y)$ la fonction de paiement du jeu défini par $\bar{A}$. On a

$$\bar{M}(x, y) = \langle x, \bar{A}y\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + a)\, x_i y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + a \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j = \langle x, Ay\rangle + a = M(x, y) + a.$$

Le couple (x^0, y^0) est un point selle dans le jeu de matrice A, si bien qu'on écrit compte tenu du lemme précédent:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} y_j^0 = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + a)\, y_j^0 \leqslant M(x^0, y^0) + a = \bar{M}(x^0, y^0),$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ainsi, on a démontré la première inégalité (4.5) pour le couple (x^0, y^0) dans le jeu défini par $\bar{A}$. On procède de même pour l'autre inégalité.

Selon l'affirmation du lemme 4.2, les inégalités (4.5) sont une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point selle. On en déduit que (x^0, y^0) est le point selle demandé.

On passe à la démonstration du théorème de von Neumann et on suppose que A est positive.

Soit deux programmes linéaires:

$$\begin{gathered} \min \langle u, e_m\rangle \\ A'u \geqslant e_n, \quad u \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.9}$$

avec $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ et e_n un vecteur de dimension n dont toutes les coordonnées sont 1, et

$$\begin{gathered} \max \langle w, e_n \rangle \\ Aw \leqslant e_m, \end{gathered} \tag{4.10}$$

où $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ et le vecteur e_m de dimension m a toutes ses coordonnées égales à 1.

Il s'agit évidemment de deux problèmes en dualité.

Comme la matrice A (et, partant, A') est formée d'éléments positifs, le problème (4.9) a un sens, et l'on prend pour vecteur réalisable un vecteur u de coordonnées positives suffisamment grandes. Le problème (4.10) a un sens lui aussi : le vecteur $w = 0$ respecte toutes les contraintes.

Aux termes du théorème de dualité, (4.9) et (4.10) possèdent des solutions (ce sont u^0 et w^0 respectivement) et ont même valeur, i.e. $\langle u^0, e_m \rangle = \langle w^0, e_n \rangle = d$. Evidemment, $d = \langle w^0, e_n \rangle > 0$ parce que tout vecteur w de coordonnées positives suffisamment petites est réalisable pour (4.10) et $\langle e_n, w^0 \rangle \geqslant \langle e_n, w \rangle$.

On montre que les stratégies mixtes $x^0 = \frac{1}{d} u^0$ et $y^0 = \frac{1}{d} w^0$ forment un point selle du jeu.

Il résulte de (4.9) que $A'x^0 \geqslant v_n$, et (4.10) fournit $Ay^0 \leqslant v_m$, où comme toujours $v_n = v \cdot e_n$, $v_m = v \cdot e_m$, $v = 1/d$. On a par le théorème d'équilibre $\langle u^0, Aw^0 \rangle = \langle u^0, e_m \rangle = d$. On y porte $u^0 = dx^0$, $w^0 = dy^0$, il vient $\langle x^0, Ay^0 \rangle = v$.

Les relations obtenues entre les vecteurs x^0, y^0, le nombre v et la matrice A signifient que le couple (x^0, y^0) est un point selle du jeu et le nombre v en est la valeur (lemme 4.2).

§ 2. Sur l'existence du cœur d'un jeu coopératif à n personnes

Le théorème fondamental des jeux matriciels (voir § 1) résout bien dans un sens le problème de choix d'une stratégie dans les situations socio-économiques décrites par les modèles de jeu antagoniste à 2 personnes. Mais le duel n'épuise manifestement pas la diversité des phénomènes sociaux. Dans la réalité, on rencontre plutôt des cas où l'on est en présence de nombreux individus ayant des intérêts différents mais non nécessairement opposés. La théorie des jeux à n personnes étudie une assez vaste gamme de modèles de ce type (voir [19] à [21]). Comme il nous est impossible de nous arrêter, ne fût-ce que sommairement, à toutes les idées de cette partie des mathématiques, nous centrons ce paragraphe autour de la notion de solution d'un jeu coopératif à n personnes.

On exposera les concepts théoriques de base à travers une interprétation possible (fort conventionnelle) d'un problème.

On propose à plusieurs firmes un contrat avantageux. Soit n le nombre de firmes numérotées par 1, 2, . . ., n et N l'ensemble des firmes, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Le montant du contrat est égal à $v(N)$. Les firmes concernées engagent des pourparlers dont l'objectif numéro un est de convenir de la répartition de $v(N)$ entre les participants. La difficulté tient à ce que plusieurs firmes (n'importe lesquelles) peuvent en général former une coalition et signer un autre contrat.

Toute partie S des participants, $S \subseteq N$, constitue une *coalition*. Soit S une coalition qui a la possibilité de conclure un contrat à elle et soit $v(S)$ son montant (qui peut être nul). On suppose que les pourparlers préliminaires aboutissent à proposer le partage suivant: on versera à la i-ième firme la quantité x_i, $x_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

Il est clair que si la somme des x_i, $i \in S$ (i.e. le montant à verser à la coalition S) est inférieure à $v(S)$, les firmes de S refusent ce partage car elles peuvent recevoir plus ailleurs. Ainsi, le problème consiste à trouver un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ décrivant un partage de $v(N)$ qui satisfait toutes les coalitions possibles. Il se trouve que le problème n'est pas nécessairement résoluble.

La description formelle d'un jeu coopératif à n personnes est la suivante.

S'agissant d'un jeu à n personnes, on note $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble de tous les joueurs. On appelle coalition toute partie S non vide de N. L'ensemble S peut être à un élément ou être égal à N tout entier.

On suppose donnée, sur les parties de N, une fonction qui associe à tout $S \subseteq N$ un nombre réel non négatif $v(S)$. La fonction v porte le nom de *fonction caractéristique du jeu*. On l'assujettit à deux conditions:

1) $$v(\varnothing) = 0. \tag{4.11}$$

Cette condition est naturelle vu que le symbole $\varnothing$ signifie un ensemble vide (le lecteur s'en souvient certainement).

2) $$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T) \tag{4.12}$$

si $S \cap T = \varnothing$.

La condition 2) traduit la propriété suivante: en réunissant leurs efforts, deux coalitions disjointes s'assurent un gain total au moins égal au total des gains individuels. Il en découle en particulier que $v(N) \geqslant v(S)$ pour toute coalition S, si bien qu'avec la condition $v(N) > v(S)$, chaque groupe espère que l'action conjuguée lui permettra de gagner plus que par lui-même.

DÉFINITION 4.6. On appelle *imputation* un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que

1) $$\sum_{i \in N} x_i = v(N);$$

2) $$x_i \geqslant v(\{i\}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La condition 2) veut dire qu'on ne saurait payer au participant i moins qu'il n'aurait obtenu tout seul.

Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux imputations. On suppose que les participants doivent choisir l'un d'eux et que x est plus avantageux que y pour la coalition S. Dans quel cas S peut insister sur ce partage en menaçant de ne jouer plus le jeu si ses partenaires le refusent? Il est clair que la chose n'est possible que si la quantité $v(S)$ est au moins égale au montant versé à S conformément à x. On est amené à une notion fondamentale de la théorie des jeux coopératifs.

DÉFINITION 4.7. Soient x, y deux imputations et S une coalition. On dit que x *domine* y *pour la coalition* S si

1) $$x_i > y_i \text{ quel que soit } i \in S,$$

2) $$\sum_{i \in S} x_i \leqslant v(S).$$

La notation correspondante est $x \underset{S}{\succ} y$.

DÉFINITION 4.8. On dit que x *domine* y, et on note $x \succ y$, s'il existe au moins une coalition S pour laquelle $x \underset{S}{\succ} y$.

Divers cas particuliers de jeux coopératifs ont un intérêt certain. Nous utiliserons, à titre d'illustration, un jeu défini comme suit.

DÉFINITION 4.9. Un jeu est dit *symétrique* si la valeur $v(S)$ de la fonction caractéristique ne dépend que du nombre de joueurs de la coalition S.

Voyons ce qu'on entend par solution d'un jeu coopératif. Il y a lieu de dire qu'on ne peut probablement trouver, même dans un jeu concret, une imputation qui donne le profit maximal à tous les joueurs, i.e. une imputation telle qu'aucune coalition n'assure mieux à chacun de ses membres. Cela suggère l'idée de restreindre au possible l'ensemble des imputations restantes de façon qu'aucun groupe de joueurs n'ait de raison de refuser une imputation quelconque de l'ensemble.

DÉFINITION 4.10. On appelle *cœur d'un jeu* l'ensemble de ses imputations indominées. On note $C(v)$ le cœur d'un jeu de fonction caractéristique v.

THÉORÈME 4.3. *Le cœur d'un jeu est l'ensemble des vecteurs* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *tels que*

1) $$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S) \quad \forall S \subset N,$$

2) $$\sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

DÉMONSTRATION. Soit x un vecteur vérifiant 1) et 2). On pose $S = \{i\}$. La condition 1) devient $x_i \geqslant v(\{i\})$ qui signifie avec 2) que x est une imputation. On montre que x n'est dominé par aucune autre imputation y. On admet que $y_i > x_i$ pour tout $i \in S$, S étant une coalition. Dans ce cas, $\sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$, i.e. $\sum_{i \in S} y_i > v(S)$, ce qui veut dire que y ne domine x pour aucune S. Donc, $x \in C(v)$. Il reste à montrer que si le vecteur y ne respecte pas au moins l'une des conditions du théorème, il n'est pas dans le cœur du jeu. Mais il est clair que y ne vérifiant pas 2) n'est en général pas une imputation. Faisons l'hypothèse de y ne satisfaisant pas à 1), i.e. il existe une coalition S telle que $\sum_{i \in S} y_i < v(S)$. On trouve dans ce cas un nombre $\varepsilon > 0$ pour lequel $\sum_{i \in S} y_i = v(S) - \varepsilon$. On pose

$$\alpha = v(N) - v(S) - \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}).$$

Etant donné (4.12), on vérifie sans peine que $\alpha \geqslant 0$. Soit $|S|$ le nombre d'éléments de la coalition S.

On prend un vecteur $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ défini par les égalités

$$z_i = \begin{cases} y_i + \dfrac{\varepsilon}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ v(\{i\}) + \dfrac{\alpha}{n - |S|} & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

On vérifie que z est une imputation. En effet, on a évidemment $z_i \geqslant v(\{i\})$ pour $i \notin S$. Si $i \in S$, alors $z_i \geqslant y_i \geqslant v(\{i\})$, i.e. $z_i \geqslant v(\{i\})$ une fois de plus. D'autre part,

$$\sum_{i \in N} z_i = \sum_{i \in S} \left(y_i + \frac{\varepsilon}{|S|}\right) + \sum_{i \in N \setminus S} \left(v(\{i\}) + \frac{\alpha}{n - |S|}\right) =$$

$$= \sum_{i \in S} y_i + \varepsilon + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) + \alpha = v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) + \alpha = v(N).$$

Ainsi, z est une imputation, et z domine, par définition, le vecteur y pour S. Par conséquent, $y \notin C(v)$.

Le théorème entraîne que le cœur $C(v)$ est un polyèdre fermé.

On se demande tout naturellement si l'on peut utiliser la théorie de la programmation linéaire pour voir plus clair dans les problèmes concernant la notion de cœur.

Soit le programme linéaire

$$\min \sum_{i \in N} x_i$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$$

quels que soient $S \subset N$, $S \neq N$. Il y a autant de contraintes que de coalitions $S \subset N$. On aura besoin, pour construire le dual, de nouvelles notations. On désigne par p_S la variable duale correspondant à la contrainte de coalition. On introduit les vecteurs $\bar{S} \in \mathbf{R}^n$:

$$\bar{S}(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \in S, \\ 0 \text{ si } i \notin S. \end{cases}$$

En d'autres termes, $\bar{S}$ est un vecteur de dimension n dont les coordonnées 1 occupent les places numérotées par les mêmes chiffres que les participants à la coalition S.

Nous dirons que $\bar{S}$ est le *vecteur d'incidence à la coalition* S. On désigne par e^n le vecteur n-dimensionnel $e^n = (1, 1, \ldots, 1)$. Le problème dual s'écrit

$$\max \sum_{S \in N} p_S v(S)$$

$$\sum_{S \in N} p_S \bar{S} = e^n, \quad p_S \geqslant 0, \quad \forall S \subset N.$$

Les contraintes du dual sont au nombre de n, tandis que le primal en a $n \times (2^n - 2)$. Cela étant, le dual a manifestement plus de variables que le primal.

Le problème primal a évidemment un sens. D'autre part, sa forme linéaire est minorée sur l'ensemble admissible car certaines contraintes sont des inégalités de la forme $x_i \geqslant v(\{i\})$, $i \in N$. Par le théorème 3.1, le problème possède une solution, auquel cas il en est de même du dual. On note d la valeur commune des deux problèmes. On voit aisément que si $d \leqslant v(N)$, alors le cœur $C(v)$ du jeu est non vide. En effet, soit x une solution du primal. On prend le vecteur $\tilde{x} = \alpha x$, $\alpha = \frac{v(N)}{d} \geqslant 1$.

On a

$$\sum_{i \in N} \tilde{x}_i = \alpha \sum_{i \in N} x_i = \alpha d = v(N).$$

Le vecteur x étant réalisable, on a, d'autre part,

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i = \alpha \sum_{i \in S} x_i \geqslant \alpha v(S) \geqslant v(S),$$

d'où $\tilde{x} \in C(v)$. Inversement, si $d > v(N)$, tout vecteur x tel que $\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$ vérifie l'inégalité $\sum_{i \in N} x_i \geqslant d > v(N)$, i.e. le cœur $C(v)$ est vide.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante de non-vacuité du cœur $C(v)$ est $d \leqslant v(N)$.

Ces considérations aidant, on a le résultat suivant : pour que $C(v)$ soit non vide, il faut et il suffit que tout jeu de nombres p_S, $S \subset N$, tel que

$$\sum_{S \subset N} p_S \bar{S} = e^n, \quad p_S \geqslant 0, \quad S \subset N, \tag{4.13}$$

remplisse la condition

$$\sum_{S \subset N} p_S v(S) \leqslant v(N). \tag{4.14}$$

L'ensemble des vecteurs $\{p_S, S \subset N\}$ vérifiant les équations (4.13) est un polyèdre convexe (chaque coordonnée p_S est $\leqslant 1$). Il suffit donc que la forme linéaire $\sum_{S \subset N} p_S v(S)$ soit bornée par $v(N)$ aux seuls points extrêmes du polyèdre.

Nous venons de démontrer le

THÉORÈME 4.4. *Le cœur $C(v)$ est non vide si et seulement si chaque point extrême du polyèdre* (4.13) *satisfait à la condition* (4.14).

L'intérêt de ce théorème tient à ce que le polyèdre (4.13) est indépendant de la fonction caractéristique $v(S)$ du jeu. Cela permet, après avoir calculé une fois pour toutes, disons, par la méthode du simplexe les points extrêmes de (4.13) (qui sont en nombre fini), de vérifier sans difficulté l'existence du cœur de tout jeu coopératif à n personnes ; il suffit d'établir la validité de (4.14).

On note que la recherche des points extrêmes en question est en principe relativement simple. Selon le théorème 2.18, on doit explorer une à une toutes les $n \times n$-matrices partielles non dégénérées des contraintes de (4.13). Il est connu, d'autre part, que les points extrêmes du polyèdre (4.13) sont si nombreux pour n importants qu'on ne saurait les calculer dans la pratique. La forme simple des contraintes (4.13) et leur invariance dans le renumérotage des variables autorisent cependant à espérer que le théorème démontré sera d'une certaine utilité dans l'étude théorique des jeux coopératifs.

On montre qu'avec le théorème 4.4 on obtient une condition nécessaire et suffisante d'existence du cœur d'un jeu symétrique à n personnes. On démontre au préalable un résultat général.

THÉORÈME 4.5. *Pour qu'un jeu coopératif à n personnes ait un cœur, il suffit que la fonction caractéristique v vérifie la condition*

$$v(S) \leqslant \frac{|S|}{n} v(N)$$

pour tous les $S \subset N$.

La démonstration est immédiate. En effet, il est clair que l'inégalité

$$\sum_{i \in S} \alpha_i = \frac{v(N)}{n} |S| \geqslant v(S)$$

entraîne sous cette condition que l'imputation $\alpha = \left(\frac{v(N)}{n}, \frac{v(N)}{n}, \ldots, \frac{v(N)}{n}\right)$ appartient au cœur.

Il se trouve que la condition est nécessaire dans le cas de jeux symétriques.

THÉOREME 4.6. *Pour qu'un jeu symétrique possède un cœur, il faut et il suffit que* $v(S) \leqslant \frac{|S|}{n} v(N)$ *pour chaque* $S \subset N$.

DÉMONSTRATION. La suffisance découle du théorème précédent. On démontre la nécessité. On suppose que le cœur du jeu n'est pas vide, et soit S une coalition arbitraire de m joueurs, i.e. $|S| = m < n$.

LEMME 4.4. *Il existe n coalitions* S_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *telles que chacune contienne m éléments et les vecteurs* $\overline{S}_j$ *d'incidence à* S_j *jouissent de la propriété*

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{S}_j = e^n.$$

En effet, on prend pour $\overline{S}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, les vecteurs dont la i-ième coordonnée $\overline{S}_j(i)$ est définie par la formule

$$\overline{S}_j(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant i - j \leqslant m - 1, \\ 1 \text{ si } i - j \leqslant -(n - m + 1), \\ 0 \text{ dans le cas contraire;} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le soin de vérifier si ces vecteurs respectent les conditions du lemme est laissé au lecteur.

Prenons un vecteur $\{p_S, S \subset N\}$ tel que $p_S = 1/m$ si $S = S_j$ pour un j, $1 \leqslant j \leqslant n$, et $p_S = 0$ dans le cas contraire. Evidemment,

$$\sum_{S \subset N} p_S \overline{S} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m} \overline{S}_j = e^n.$$

Ainsi, les nombres choisis remplissent (4.13). Le cœur $C(v)$ étant supposé non vide, il en résulte (4.14), i.e. $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m} v(\overline{S}_j) \leqslant v(N)$.

Le jeu est symétrique, si bien que $v(\bar{S}_j) = v(S)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, et on a $\frac{1}{m} nv(S) \leqslant v(N)$.

On établit, pour illustrer le théorème 4.4, une condition nécessaire et suffisante d'existence du cœur pour un jeu quelconque à 3 personnes.

Dans ce cas, $N = \{1, 2, 3\}$, et l'ensemble des coalitions autres que N comprend 6 éléments suivants:

$$S_1 = \{1\},\ S_2 = \{2\},\ S_3 = \{3\},\ S_{12} = \{1, 2\},\ S_{13} = \{1, 3\},\ S_{23} = \{2, 3\}.$$

Les vecteurs d'incidence correspondants sont

$$\bar{S}_1 = (1, 0, 0),\quad \bar{S}_2 = (0, 1, 0),\quad \bar{S}_3 = (0, 0, 1),\quad \bar{S}_{12} = (1, 1, 0),$$
$$\bar{S}_{13} = (1, 0, 1),\quad \bar{S}_{23} = (0, 1, 1).$$

Le polyèdre (4.13) est défini par

$$p_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + p_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + p_{12}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + p_{13}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + p_{23}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$
$$(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) \geqslant 0.$$

Il faut trouver tous les points extrêmes du polyèdre. Le théorème 2.18 dit qu'un point est défini dans l'espace n-dimensionnel moyennant n équations linéairement indépendantes. Dans notre cas, $n = 6$, et on ajoute à trois équations disponibles trois équations provenant de la condition de non-négativité des variables. En d'autres termes, parmi

$$p_1 = 0,\quad p_2 = 0,\quad p_3 = 0,\quad p_{12} = 0,\quad p_{13} = 0,\quad p_{23} = 0,$$

on choisit trois équations. Comme on peut procéder de 20 manières différentes ($C_6^3 = 20$), l'exploration complète s'avère assez fastidieuse. Si l'on se rappelle que le polyèdre (4.13) est invariant pour le renumérotage des inconnues, on se limite aux cas suivants:

$$1)\ \begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = 0, \\ p_3 = 0; \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = 0, \\ p_{12} = 0; \end{cases}\quad 3)\ \begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = 0, \\ p_{13} = 0; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} p_1 = 0, \\ p_{12} = 0, \\ p_{13} = 0; \end{cases}\quad 5)\ \begin{cases} p_{12} = 0, \\ p_{13} = 0, \\ p_{23} = 0. \end{cases}$$

Les solutions respectives sont:

1) (0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2);
2) (0, 0, —1, 0, 1, 1) extérieure au polyèdre;
3) (0, 0, 1, 1, 0, 0);
4) la matrice est dégénérée;
5) (1, 1, 1, 0, 0, 0).

Ainsi, on obtient trois points extrêmes du polyèdre (4.13):

$$(0,\ 0,\ 0,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2),\quad (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),\quad (1,1,1,0,0,0).$$

Les autres points extrêmes s'en obtiennent par renumérotage des variables. Ils sont deux:

$$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0),\quad (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Vu le théorème 4.4, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un jeu à 3 personnes possède un cœur s'écrivent:

$$\frac{1}{2}(v(S_{12})+v(S_{13})+v(S_{23}))\leqslant v(N),$$
$$v(S_i)+v(S_{jk})\leqslant v(N),\quad i\neq j,\quad i\neq k,\quad j\neq k,$$
$$v(S_1)+v(S_2)+v(S_3)\leqslant v(N).$$

Seule est essentielle la première condition parce que les deux autres sont toujours vérifiées par suite de (4.12) imposée à la fonction caractéristique du jeu.

On dit finalement qu'*un jeu à trois personnes a un cœur non vide si et seulement si* $v(S_{12})+v(S_{13})+v(S_{23})\leqslant 2v(N)$.

§ 3. Propriétés des matrices non négatives

Lorsqu'on modélise les phénomènes physiques, économiques et sociaux, le modèle linéaire comprend souvent des matrices d'éléments non négatifs (on n'a que revoir le chapitre premier). Dans ce cas, les propriétés spéciales aux matrices carrées non négatives s'avèrent fort utiles. Elles sont notamment décisives quand on décrit les caractéristiques qualitatives des trajectoires optimales dans le modèle dynamique de Leontief (voir § 5 du présent chapitre). Dans ce paragraphe, on démontrera par le biais de la programmation linéaire une propriété des plus importantes des matrices non négatives, à savoir on verra qu'elles possèdent une valeur propre réelle non négative et un vecteur propre non négatif associé.

Le symbole A désignera dans ce paragraphe une matrice carrée d'ordre n d'éléments non négatifs:

$$A=(a_{ij}),\quad a_{ij}\geqslant 0,\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Dans la suite de l'exposé, un rôle capital revient à la notion de matrice indécomposable. On note $N=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ l'ensemble des entiers naturels de 1 à n.

Définition 4.11. Soit S une partie de l'ensemble N. On dit que S est *isolé* si dans A $a_{ij}=0$ pour $j\in S$, $i\in N\setminus S$.

Cela signifie en termes de modèle de Leontief que les industries indicées par $j\in S$ n'utilisent pas les biens produits par les industries de numéros pris dans l'ensemble $N\setminus S$. Si l' on renumérote les indices de sorte que $S=\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, $N\setminus S=\{k+1,\ \ldots,\ n\}$ (ce qui

correspond à la permutation simultanée des lignes et colonnes de la matrice A), alors A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

avec A_1 et A_3 des sous-matrices carrées de dimension $k \times k$ et $(n-k) \times (n-k)$ respectivement.

DÉFINITION 4.12. La matrice A est dite *indécomposable* si l'ensemble N n'a pas de sous-ensembles isolés à part N et l'ensemble vide.

Autrement dit, la matrice A est indécomposable si aucune permutation simultanée de ses lignes et de ses colonnes ne la ramène à la forme (4.15).

La notion de matrice indécomposable a une interprétation économique intéressante. S'agissant du modèle de Leontief, cette propriété de A signifie que chaque industrie consomme, ne serait-ce qu'indirectement, les biens produits par toutes les autres industries. L'énoncé rigoureux de ce fait constitue le contenu de l'exercice 8.

LEMME 4.5. *Soit A une matrice indécomposable, $x \in \mathbf{R}^n$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$. On suppose en outre que le vecteur x a des coordonnées nulles et $S = \{j \mid x_j = 0\}$. Le vecteur $y = Ax$ a une coordonnée $y_i > 0$, et $i \in S$.*

DÉMONSTRATION. On introduit la notation $T = \{i \mid y_i > 0\}$. Il faut montrer que $S \cap T \neq \varnothing$. On procède par l'absurde et on fait l'hypothèse $S \cap T = \varnothing$, auquel cas $S \subseteq N \setminus T$. On montre que $N \setminus S$ est un sous-ensemble isolé. Soit $j \in N \setminus S$, $i \in S$. On a $i \in S \subseteq N \setminus T$, d'où $y_i = 0$, si bien que

$$0 = y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = \sum_{j \in N \setminus S} a_{ij} x_j.$$

Comme $x_j \geqslant 0$ pour $j \in N \setminus S$, l'égalité précédente (et la condition $a_{ij} \geqslant 0$) donnent $a_{ij} = 0$ pour $j \in N \setminus S$, $i \in S$. La matrice A étant indécomposable par hypothèse, l'ensemble N ne contient pas de parties isolées. Cette contradiction démontre le lemme.

CONSÉQUENCE. *Si la matrice A est indécomposable, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, alors l'inégalité $Ax \leqslant \alpha x$ implique $\alpha > 0$, $x > 0$.*

En effet, $\alpha > 0$ car $Ax \geqslant 0$, $Ax \neq 0$. Si l'on admet que l'ensemble $S = \{j \mid x_j = 0\}$ n'est pas vide, on trouve par le lemme un $j \in S$ tel que $(Ax)_j > 0$. Alors $(Ax)_j \leqslant \alpha x_j$ ne peut avoir lieu vu que $x_j = 0$.

THÉORÈME DE FROBENIUS-PERRON. *Une matrice indécomposable A possède une valeur propre $\lambda_A > 0$, et chaque valeur propre λ (réelle ou complexe) de A est de module au plus égal à λ_A.*

Il correspond à λ_A un vecteur propre x_A unique (à un facteur scalaire près) qui a toutes ses coordonnées non nulles et de même signe (i.e. *on estime que $x_A > 0$*).

DÉMONSTRATION. On introduit la notation $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Soit le problème de programmation linéaire

$$\min u$$
$$(A - \lambda I)x - ue \leqslant 0, \quad \langle x, e\rangle = 1, \quad x \geqslant 0. \tag{4.16}$$

Ici le vecteur variables s'écrit $(x, u) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$. Le nombre λ est fixé et constitue un paramètre.

L'ensemble $\overline{X}$ des vecteurs $x \in \mathbf{R}^n$, $x \geqslant 0$, $\langle x, e\rangle = 1$, est borné. Il en est donc de même de l'ensemble de tous les vecteurs $(A - \lambda I)x$ pour tout λ fixé et pour $x \in \overline{X}$. Soit $\widetilde{X} = \{y \mid y = (A - \lambda I)x, x \in \overline{X}\}$. Le nombre u du problème (4.16) est défini par

$$u = \min_{y \in \widetilde{X}} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j.$$

L'ensemble $\widetilde{X}$ étant borné et fermé, u est fini. Cela montre que le problème proposé a pour solution $(x(\lambda), u(\lambda))$ quel que soit le paramètre λ.

Les résultats généraux sur les problèmes paramétriques (voir ch. VIII) entraînent la continuité de la fonction $u(\lambda)$. D'ailleurs, on le vérifie de façon immédiate. En effet, la fonction $\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j - \lambda x_i)$ est continue en $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$, auquel cas $\varphi(x, \lambda) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j - \lambda x_i)$ est continue elle aussi. On montre que si $\overline{X}$ est un compact, la fonction $u(\lambda) = \min_{x \in \overline{X}} \varphi(x, \lambda)$ est continue avec toute $\varphi(x, \lambda)$. En effet, soit

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \lambda_0, \quad \varphi(x^k, \lambda_k) = \min_{x \in \overline{X}} \varphi(x, \lambda_k),$$
$$x^k \in \overline{X}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$\overline{X}$ est compact si bien qu'il y a convergence de la suite $\{x^k\}$. Soit $\lim_{k \to \infty} x^k = x^0$. On passe à la limite dans $\varphi(x^k, \lambda_k) \leqslant \varphi(x, \lambda_k)$, et la continuité de φ fait que $\varphi(x^0, \lambda_0) \leqslant \varphi(x, \lambda_0)$ pour tout $x \in \overline{X}$. Or, cela veut dire que $u(\lambda_0) = \varphi(x^0, \lambda_0)$, i.e.

$$\lim_{k \to \infty} u(\lambda_k) = \lim_{k \to \infty} \varphi(x^k, \lambda_k) = \varphi(x^0, \lambda_0) = u(\lambda_0).$$

Ainsi, on a établi la propriété de continuité de la fonction $u(\lambda)$ des valeurs du problème (4.16).

Evidemment, $\varphi(x, \lambda) \to -\infty$ pour $\lambda \to +\infty$, et $\varphi(x, \lambda) \to +\infty$ quand $\lambda \to -\infty$ pour chaque $x \in \bar{X}$ fixé. Vu la borne de $\bar{X}$, il en est de même de $u(\lambda)$. Ainsi,

1) $u(\lambda)$ est continue,
2) $u(\lambda) \to -\infty$ quand $\lambda \to +\infty$,
3) $u(\lambda) \to +\infty$ quand $\lambda \to -\infty$.

Il découle des propriétés 1) à 3) qu'il existe un nombre λ_A tel que $u(\lambda_A) = 0$. On désigne par x_A le vecteur solution de (4.16) pour $\lambda = \lambda_A$. On a

$$Ax_A \leqslant \lambda_A x_A, \quad x_A \geqslant 0, \quad \langle x_A, e\rangle = 1. \tag{4.17}$$

Le dual de (4.16) est de la forme

$$\max v$$
$$(A - \lambda I)'p + ve \geqslant 0, \quad \langle p, e\rangle = 1, \quad p \geqslant 0. \tag{4.18}$$

Aux termes du théorème de dualité, la valeur de (4.18) est 0 pour $\lambda = \lambda_A$.

On désigne par p_A le vecteur solution de (4.18) pour $\lambda = \lambda_A$, auquel cas $A'p_A \geqslant \lambda_A p_A$. On applique à (4.17) la conséquence du lemme 4.5, il vient $\lambda_A > 0$, $x_A > 0$. La dernière inégalité stricte implique par le théorème d'équilibre $A'p_A = \lambda_A p_A$. La même conséquence donne $p_A > 0$. Avec le théorème d'équilibre, $Ax_A = \lambda_A x_A$. (La propriété de A' d'être indécomposable avec A est pour nous une évidence; voir exer. 4.)

On démontre maintenant que le vecteur propre x_A associé à λ_A est unique à un facteur scalaire près.

Soit x'_A un vecteur tel que $Ax'_A = \lambda_A x'_A$ et le couple x_A, x'_A soit linéairement indépendant. On trouve des nombres α, β tels que le vecteur $\tilde{x} = \alpha x_A + \beta x'_A$ ait au moins une coordonnée nulle et $\tilde{x} \neq 0$. Le vecteur $\tilde{x}$ est un vecteur propre parce que $A\tilde{x} = \alpha A x_A + \beta A x'_A = \lambda_A(\alpha x_A + \beta x'_A) = \lambda_A \tilde{x}$. On tire de $A\tilde{x} = \lambda_A \tilde{x}$

$$A\,|\tilde{x}| \geqslant \lambda_A\,|\tilde{x}|, \tag{4.19}$$

où $|\tilde{x}| = (|\tilde{x}_1|, |\tilde{x}_2|, \ldots, |\tilde{x}_n|)$. On obtient (4.19) si l'on se rappelle que le module de la somme de deux nombres est au plus égal à la somme de leurs modules: comme $(A\tilde{x})_i = \lambda_A \tilde{x}_i$, on a $|(A\tilde{x})_i| = \lambda_A |\tilde{x}_i|$; donc,

$$|(A\tilde{x})_i| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\tilde{x}_j| = (A|\tilde{x}|)_i.$$

On admet que (4.19) devient une inégalité stricte ne fût-ce que pour une seule coordonnée. Si l'on multiplie (4.19) scalairement par le vecteur p_A positif, on a dans ce cas

$$\langle A\,|\tilde{x}|, p_A\rangle > \lambda_A\,\langle |\tilde{x}|, p_A\rangle.$$

On note que $\langle A\,|\tilde{x}|,\, p_A\rangle = \langle |\tilde{x}|,\, A'p_A\rangle = \lambda_A\,\langle |\tilde{x}|,\, p_A\rangle$, si bien que $\lambda_A\langle |\tilde{x}|, p_A\rangle > \lambda_A\langle |\tilde{x}|,\, p_A\rangle$: inégalité contradictoire. Donc, $A\,|\tilde{x}| = \lambda_A\,|\tilde{x}|$. On a $|\tilde{x}| > 0$ par la conséquence du lemme 4.5, ce qui contredit la définition du vecteur $\tilde{x}$. Ainsi x_A est bien l'unique vecteur propre associé à λ_A.

Soit λ une valeur propre quelconque (réelle ou complexe) de la matrice A et z un vecteur propre correspondant. Il découle de $Az = \lambda z$

$$A\,|z| \geqslant |\lambda|\,|z|, \tag{4.20}$$

où $|z| = (|z_1|,\, |z_2|,\, \ldots,\, |z_n|)$. On multiplie scalairement par $p_A > 0$, il vient

$$\langle A\,|z|,\, p_A\rangle \geqslant |\lambda|\,\langle |z|,\, p_A\rangle,$$

d'où $\lambda_A\langle |z|, p_A\rangle \geqslant |\lambda|\,\langle |z|, p_A\rangle$, i.e. $\lambda_A \geqslant |\lambda|$ (compte tenu de $\langle |z|,\, p_A\rangle > 0$). Le théorème est démontré.

On établit sans peine un analogue du théorème de Frobenius-Perron pour une matrice non négative arbitraire (non nécessairement indécomposable).

THÉORÈME 4.7. *Une matrice non négative A possède une valeur propre non négative $\lambda_A \geqslant 0$, et $\lambda_A \geqslant |\lambda|$ pour toute valeur propre λ de A. En outre, il correspond à la valeur propre λ_A un vecteur propre non négatif $x_A \geqslant 0$.*

La démonstration est menée par récurrence sur l'ordre de la matrice A. Si $n = 1$, le résultat est trivial. Soit $n > 1$. Si A est indécomposable, alors les affirmations voulues découlent du théorème de Frobenius-Perron. Si A est de la forme (4.15), alors A_1 et A_3 sont d'ordre inférieur à n, si bien qu'on leur applique l'hypothèse de récurrence. Soit λ_{A_1}, λ_{A_3} des valeurs propres de Frobenius des matrices A_1 et A_3 respectivement et soit $x_{A_1} \in \mathbf{R}^k$ et $x_{A_3} \in \mathbf{R}^{n-k}$ des vecteurs propres associés. On suppose que $\lambda_{A_1} \geqslant \lambda_{A_3}$. On pose $\lambda_A = \lambda_{A_1}$, $x_A = (x_{A_1}, 0)$, où 0 désigne le vecteur nul de dimension $n - k$. Le lecteur est prié d'achever la démonstration.

Aux vecteurs propres x_A, p_A des matrices A et A' respectivement et à la valeur propre λ_A (qui existent d'après les théorèmes de ce paragraphe), nous donnons le nom de vecteurs et valeurs propres *de Frobenius*.

§ 4. Effet de substitution dans le modèle généralisé de Leontief

On reprend le modèle généralisé de Leontief décrit au n° 6, § 2, ch. premier. On rappelle que la technologie du modèle est définie par deux matrices $\hat{A}$ et $\hat{I}$ à n lignes et m colonnes, n étant la quantité

de biens et m le nombre d'industries (activités) qui les produisent. On groupe les industries de sorte que le groupe k contient toutes les industries produisant le bien k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Formalisons ce que nous venons de dire. Soit $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $M = \bigcup_{k=1}^{n} M_k$, $M_k \cap \cap M_{k'} = \varnothing$ pour $k \neq k'$.

Le fait $j \in M_k$ signifie que l'activité j produit le bien k.

La colonne $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ de la matrice $\hat{A}$ définit la quantité de chaque ressource $i = 1, 2, \ldots, n$ nécessaire à la production d'une unité du bien de l'activité j, et la colonne $e^j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ de $\hat{I}$, avec 1 occupant la place de la coordonnée j, décrit les outputs de l'activité j.

On allège l'exposé en introduisant certaines notations. Soit $\sigma = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, où $j_k \in M_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, une partie de l'ensemble des indices M qui correspond à une activité choisie dans chaque M_k.

On désigne par $\hat{A}_\sigma$ la matrice formée de toutes les colonnes de $\hat{A}$ indicées par les éléments de σ. On opère de même pour $\hat{I}_\sigma$. Les matrices $\hat{A}_\sigma$ et $\hat{I}_\sigma$ sont carrées à n lignes et n colonnes. La matrice $\hat{I}_\sigma$ est une matrice unité, si bien que $\hat{A}_\sigma$ définit le modèle usuel de Leontief. Nous dirons que $\hat{A}_\sigma$ constitue un *sous-modèle du modèle généralisé de Leontief*.

Le modèle généralisé de Leontief $(\hat{A}, \hat{I})$ est dit *productif* s'il existe pour tout vecteur non négatif $c \in \mathbf{R}^n_+$ une solution non négative $x \in \mathbf{R}^m_+$ du système $\hat{I}x - \hat{A}x \geqslant c$, $x \geqslant 0$. Autrement dit, $(\hat{A}, \hat{I})$ est productif si toute demande finale de ce modèle est satisfaite.

On convient des notations suivantes. Quel que soit $x \in \mathbf{R}^m_+$, x_σ désigne le vecteur $x_\sigma = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}) \in \mathbf{R}^n_+$; $\tilde{A} = \hat{I} - \hat{A}$. On formule le problème (voir (1.12)) consistant à satisfaire la demande finale pour la consommation de travail minimale :

$$\begin{gathered} \min \ \langle l, x \rangle \\ \tilde{A}x \geqslant c, \quad x \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.21}$$

où $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$, l_i désignant le travail absorbé par l'activité i au niveau i.

THÉORÈME DE SUBSTITUTION (SAMUELSON). *Il existe un sous-modèle $\hat{A}_\sigma$ du modèle généralisé de Leontief $(\hat{A}, \hat{I})$ tel qu'on trouve, parmi les solutions du problème* (4.21), *pour une demande finale $c > 0$ quelconque, un vecteur $\hat{x}$ ayant la propriété suivante : $\hat{x}_i = 0$ si $i \notin \sigma$ et $\hat{x}_i > 0$ pour $i \in \sigma$.*

La démonstration découle de plusieurs lemmes de la théorie de la programmation linéaire.

Soit le dual de (4.21):

$$\begin{gathered} \max \langle c, y \rangle \\ \tilde{A}'y \leqslant l, \quad y \geqslant 0. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Si l'on considère les variables duales y comme prix des biens en posant le salaire d'un ouvrier égal à 1, alors le problème (4.22) est de maximiser le coût des biens produits (production nette) à condition que l'économie ne procure pas de profit.

Le primal (4.21) et le dual (4.22) ont chacun un sens. En effet, cela découle dans le premier cas de l'hypothèse de modèle généralisé productif, tandis qu'on indique de suite un vecteur réalisable sous forme explicite du problème (4.22): $y = 0$.

Par le théorème de dualité, les deux problèmes possèdent une solution. Soient $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ des solutions respectives.

Une solution x du problème (4.21) est dite *de base* si le vecteur x a au plus n coordonnées positives.

LEMME 4.6. *Le problème* (4.21) *admet une solution de base.*

Ce résultat coïncide avec le lemme 2.1.

LEMME 4.7. *La solution de base* $\tilde{x}$ *du problème* (4.21) *jouit de la propriété suivante: il existe un ensemble d'indices* $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, $i_k \in M_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *tel que* $\tilde{x}_i > 0$, $i \in \sigma$, *et* $\tilde{x}_i = 0$, $i \notin \sigma$.

DÉMONSTRATION. L'affirmation découle de la définition d'une solution de base et de la structure de la matrice $\tilde{A}$. En effet, $\hat{I}\tilde{x} - \hat{A}\tilde{x} \geqslant c > 0$ car $\tilde{A} = \hat{I} - \hat{A}$. Vu que

$$(\hat{I}\tilde{x})_k = \sum_{i \in M_k} \tilde{x}_i > 0,$$

il existe pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, un indice i_k, $i_k \in M_k$, tel que $\tilde{x}_{i_k} > 0$. Comme une solution de base contient au plus n composantes positives, on conclut que $\tilde{x}_i = 0$ si $i \notin \sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

LEMME 4.8. *Soit* $c' \geqslant 0$ *un vecteur demande finale quelconque. On prend le problème* (4.21), *où* $c = c'$. *Il y a parmi les solutions du problème un vecteur* x' *de structure analogue à celle de la solution de base* $\tilde{x}$, i.e. $x'_i > 0$, $i \in \sigma$, *et* $x'_i = 0$, $i \notin \sigma$, σ *étant l'ensemble d'indices du lemme* 4.7.

DÉMONSTRATION. Soit le modèle de Leontief correspondant aux lignes de $\tilde{A}$ indicées par les éléments de σ. Soit $\tilde{A}_\sigma$ la matrice carrée d'ordre n associée. On trouve un vecteur $\tilde{x}_\sigma$ tel que $\tilde{A}_\sigma \tilde{x}_\sigma = c > 0$.

Le modèle $\widetilde{A}_\sigma$ est donc productif. Aussi il existe un vecteur $x'_\sigma \geqslant 0$ pour lequel $\widetilde{A}_\sigma x'_\sigma = c'$. On pose $x'_i = (x'_\sigma)_i$ si $i \in \sigma$ et $x'_i = 0$ si $i \notin \sigma$ et on construit le vecteur x' de dimension m. Manifestement, $x' \geqslant 0$, $\widetilde{A}x' = c'$. Le vecteur x' est donc réalisable pour notre problème. On montre son optimalité.

Prenons le vecteur $\widetilde{y}$ solution de (4.22). Il est réalisable même si l'on fait la substitution $c = c'$. Vu que $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ sont optimaux pour les problèmes correspondants, on a par le théorème d'équilibre

$$\widetilde{y}_j > 0 \Rightarrow (\widetilde{A}\widetilde{x})_j = c_j, \quad \widetilde{x}_i > 0 \Rightarrow (\widetilde{A}'\widetilde{y})_i = l_i.$$

Considérons le couple $(x', \widetilde{y})$. Ces vecteurs sont pour $c = c'$ des vecteurs réalisables respectifs de (4.21) et (4.22). D'autre part, $\widetilde{A}x' = c'$ et les vecteurs x' et $\widetilde{x}$ ont les mêmes coordonnées nulles, si bien qu'on a des implications analogues:

$$\widetilde{y}_j > 0 \Rightarrow (\widetilde{A}x')_j = c_j, \quad x'_i > 0 \Rightarrow (\widetilde{A}'\widetilde{y})_i = l_i.$$

On utilise de nouveau le théorème d'équilibre, il vient que x' est solution du problème.

Les lemmes 4.6 à 4.8 entraînent de suite le théorème de substitution.

S'il lui faut économiser la main-d'œuvre, une industrie peut constamment utiliser une même activité pour produire tout vecteur demande finale.

Une question se pose: qu'est-ce qui caractérise la liste des activités associée à l'ensemble σ du théorème de Samuelson?

Pour répondre à cette question, on introduit la notion de vecteur des inputs totaux de travail. Soit A_σ un modèle de Leontief. S'il est productif, on montre la non-dégénérescence de la matrice $I - A_\sigma$, et la solution de l'équation $(I - A_\sigma)x_\sigma = c$ s'écrit $x_\sigma = (I - A_\sigma)^{-1}c$. Les inputs de travail sont donnés par le nombre

$$\langle l_\sigma, x_\sigma \rangle = \langle l_\sigma, (I - A_\sigma)^{-1}c \rangle = \langle (I - A'_\sigma)^{-1} l_\sigma, c \rangle,$$

où A'_σ est, on le rappelle, la transposée de A_σ, et on donne le nom de *vecteur des inputs totaux de travail du modèle* au vecteur $l_\sigma = (I - A'_\sigma)^{-1} l_\sigma$.

Soit un ensemble d'indices arbitraire $\sigma^1 = \{i_1^1, i_2^1, \ldots, i_n^1\}$, $i_k^1 \in M_k$, $k = 1, 1, \ldots, n$. Alors σ^1 définit le modèle de Leontief $\widetilde{A}_{\sigma^1} = I - \hat{A}_{\sigma^1}$ et le vecteur des inputs directs de travail l_{σ^1} qui lui correspond. Si le sous-modèle $\hat{A}_{\sigma^1}$ est productif, on désigne par $l^*_{\sigma^1} = (I - \hat{A}'_{\sigma^1})^{-1} l_{\sigma^1}$ le vecteur de ses besoins totaux de travail.

THÉORÈME 4.8.

$$l^*_\sigma \leqslant l^*_{\sigma^1}.$$

DÉMONSTRATION. On prend les problèmes suivants:

$$\begin{gathered}\min \langle l_\sigma, x_\sigma\rangle \\ x_\sigma - \hat{A}_\sigma x_\sigma \geqslant c, \quad x_\sigma \geqslant 0;\end{gathered} \tag{4.23}$$

$$\begin{gathered}\min \langle l_{\sigma 1}, x_{\sigma 1}\rangle \\ x_{\sigma 1} - \hat{A}_{\sigma 1} x_{\sigma 1} \geqslant c, \quad x_{\sigma 1} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{4.24}$$

Le dual de (4.23) s'écrit

$$\begin{gathered}\max \langle c, y\rangle \\ (I - \hat{A}'_\sigma)\, y \leqslant l_\sigma, \quad y \geqslant 0.\end{gathered} \tag{4.25}$$

Il est déjà connu que $x_\sigma > 0$ du moment que $c > 0$. Il en découle par le théorème d'équilibre que si y_σ est une solution de (4.25), alors $(I - \hat{A}'_\sigma) y_\sigma = l_\sigma$, i.e. $l^*_\sigma = (I - \hat{A}'_\sigma)^{-1} l_\sigma = y_\sigma$. S'agissant du dual de (4.24), on a de même

$$l^*_{\sigma 1} = (I - \hat{A}'_{\sigma 1})^{-1} l_{\sigma 1} = y_{\sigma 1}.$$

D'autre part, le théorème de dualité fait que $\langle c, y_{\sigma 1}\rangle = \langle l_{\sigma 1}, x_{\sigma 1}\rangle$, $\langle c, y_\sigma\rangle = \langle l_\sigma, x_\sigma\rangle$, avec x_σ, $x_{\sigma 1}$ solutions de (4.23) et (4.24) respectivement.

Comme $\langle x_\sigma, l_\sigma\rangle \leqslant \langle x_{\sigma 1}, l_{\sigma 1}\rangle$ pour tout vecteur demande finale $c > 0$, on a $\langle c, y_\sigma\rangle \leqslant \langle c, y_{\sigma 1}\rangle$ ou $\langle c, l^*_\sigma\rangle \leqslant \langle c, l^*_{\sigma 1}\rangle$. Etant donné l'arbitraire laissé sur le vecteur $c > 0$, on conclut que $l^*_\sigma \leqslant l^*_{\sigma 1}$.

Ainsi, le sous-modèle $\hat{A}_\sigma$ est caractérisé comme suit: le vecteur de ses inputs totaux de travail l^*_σ est en chaque coordonnée au plus égal à son homologue de tout autre sous-modèle productif.

§ 5. Théorème du turnpike pour le modèle dynamique de planification

Voyons le modèle dynamique du type Leontief décrit au § 2, ch. premier. Son énoncé mathématique est (voir (1.10))

$$\begin{gathered}\max \langle c, x^T\rangle \\ Ax^1 \leqslant x^0, \; Ax^{t+1} \leqslant x^t, \; t = 1, 2, \ldots, T-1, \\ x^t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T.\end{gathered} \tag{4.26}$$

La difficulté majeure est en l'occurrence la très grande taille du problème. La description de l'économie de la société peut être si circonstanciée que le bilan des échanges intersectoriels contient jusqu'à plusieurs centaines de branches. Si la planification est dans ce cas étendue sur plusieurs années et que le temps soit mesuré, disons, en mois ou en trimestre, la dimension du programme linéaire (4.26) exclut sa résolution exacte même sur les machines électroniques les plus modernes. Les résultats qualitatifs sur le compotement des trajectoires dynamiques optimales sont donc du plus haut intérêt.

Nous nous proposons d'exposer un résultat parmi les plus importants en la matière et nous utiliserons à cet effet les propriétés établies (§ 3) des matrices non négatives et une autre propriété capitale des matrices non négatives carrées que nous ne démontrerons cependant pas de manière exhaustive car cela nous entraînerait loin de la programmation linéaire.

Admettons que la matrice technologique A du modèle de Leontief a la structure suivante: les n industries forment m groupes Γ_0, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1}$; le groupe Γ_0 ne met en œuvre que les biens produits par les industries de Γ_1, les ressources de Γ_1 proviennent uniquement de Γ_2, et ainsi de suite. Quant à Γ_{m-1}, il consomme seulement les outputs de Γ_0. Si l'on admet que le groupe Γ_0 contient les industries $1, 2, \ldots, k_1$, le groupe Γ_1 les éléments $k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2$, etc., alors la matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{m-1} \\ A_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{m-2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Définition 4.13. Une matrice indécomposable $A \geqslant 0$ est dite *imprimitive* si l'on partage l'ensemble $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ en m parties disjointes $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1}$ de telle sorte que si $a_{ij} > 0$, $i \in \Gamma_r$, alors on ait nécessairement $j \in \Gamma_{r+1}$ et $j \in \Gamma_0$ pour $r \leqslant m-2$ et $r = m - 1$ respectivement.

Un renumérotage évident des industries (qui correspond à une permutation simultanée des lignes et des colonnes) ramène une matrice imprimitive à la forme (4.27).

Les matrices indécomposables restantes sont dites *primitives*. Toute matrice A décrivant des relations inter-industrielles réelles est manifestement primitive.

Dans ce paragraphe, on utilise les notations suivantes:

x_A — vecteur de Frobenius de la matrice A,

p_A — vecteur de Frobenius de la matrice A',

λ_A — valeur de Frobenius de A et A',

si bien que $Ax_A = \lambda_A x_A$, $A'p_A = \lambda_A p_A$.

On a pour les matrices primitives un résultat remarquable connu sous le nom de

Théorème ergodique. *Soit A une matrice primitive, x un vecteur non négatif n-dimensionnel quelconque. On a*

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda_A} A\right)^t x = \mu x_A,$$

où

$$\mu = \frac{\langle x, p_A \rangle}{\langle x_A, p_A \rangle}.$$

Pour la démonstration, voir [26]. Le nom du théorème provient de la théorie des probabilités. Son idée de base est que la suite $\left(\frac{1}{\lambda_A} A\right)^t x$, $t = 1, 2, \ldots$, converge pour $x \in \mathbf{R}^n_+$ quelconque.

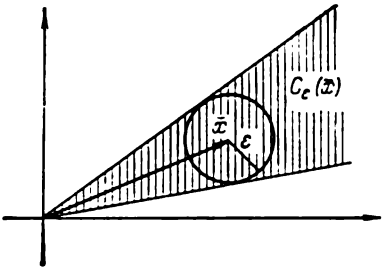


Fig. 4.1.

DÉFINITION 4.14. Soit $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque. On appelle *ε-voisinage conique du vecteur* $\bar{x}$ l'ensemble

$$C_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, \quad \exists \lambda > 0 : \| \lambda x - \bar{x} \| < \varepsilon\}$$

(voir fig. 4.1).

On énonce le théorème ergodique en termes de ε-voisinage conique:

THÉORÈME 4.9. *Soit A une matrice primitive et x un vecteur non négatif arbitraire. Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier naturel $T(\varepsilon, x)$ tel que le vecteur $x^t = A^t x$ appartienne pour $t > T(\varepsilon, x)$ au ε-voisinage conique $C_\varepsilon(x_A)$ du vecteur de Frobenius x_A.*

Voici le résultat fondamental relatif aux propriétés des solutions optimales du problème (4.26).

THÉORÈME DU TURNPIKE. *On suppose que la matrice A est primitive, la ressource initiale x^0 est positive, $c \geqslant 0$, $c \neq 0$. Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des nombres $T_1(\varepsilon)$, $T_2(\varepsilon)$ tels que si l'intervalle de planification T est suffisamment grand, notamment $T > T_1(\varepsilon) + T_2(\varepsilon)$, alors on ait $\tilde{x}^t \in C_\varepsilon(x_A)$, quel que soit t, $T_1(\varepsilon) \leqslant t \leqslant T - T_2(\varepsilon)$, pour toute trajectoire optimale $\{\tilde{x}^t\}$ du problème* (4.26).

Voyons quelle est la signification de ce résultat. Le théorème du turnpike dit que si l'intervalle de planification est suffisamment grand, alors toutes les trajectoires optimales du problème (4.26) jouissent de la propriété suivante: durant toutes les périodes numéro-

tées par t, $T_1(\varepsilon) \leqslant t \leqslant T - T_2(\varepsilon)$, la direction du vecteur des activités $\tilde{x}^t$ diffère peu de la direction de x_A. On note que le nombre de ces « bonnes» périodes augmente avec l'intervalle de planification T car $T_1(\varepsilon)$ et $T_2(\varepsilon)$ sont indépendants de T. Il s'ensuit que même si l'on n'a pas réussi à calculer la trajectoire optimale $\{\tilde{x}^t\}$, on ne s'éloigne pas trop du programme optimal à condition de choisir les vecteurs x^t de façon que la quantité

$$\left\| \frac{x^t}{\| x^t \|} - \frac{x_A}{\| x_A \|} \right\|$$

soit la plus petite possible. Ce choix ne dépend pas du vecteur des ressources initiales x^0 et de la fonctionnelle économique $\langle c, x \rangle$. L'effet en question est découvert par Dorfman, Samuelson et Solow [22]. En termes imagés, les déductions du théorème sont formulées comme suit par ces auteurs.

« C'est exactement comme une autoroute [*turnpike* en anglais.— *N.d.T.*] avec, parallèlement, un réseau de petites routes. C'est le trajet le plus rapide entre deux points ; si le départ et l'arrivée sont proches mais éloignés de l'autoroute, le meilleur chemin peut ne pas utiliser l'autoroute. Mais si l'origine et la destination sont suffisamment éloignées, il sera toujours avantageux de prendre l'autoroute et de parcourir la distance dans les meilleures conditions de transport, même si cela conduit à faire un peu plus de chemin à chaque extrémité du parcours.»

Passons à la démonstration du théorème du turnpike. On construit le dual de (4.26).

Le vecteur des variables de (4.26) étant de dimension $n \times T$ s'écrit $x = (x^1, x^2, \ldots, x^T)$, où chaque x^t est un vecteur n-dimensionnel. Le vecteur second membre des contraintes est $b = (x^0, 0, \ldots, 0)$, et le vecteur des coefficients de l'objectif est $c^* = (0, 0, \ldots, c)$; ici 0 désigne le vecteur nul de dimension n. Matriciellement, le problème (4.26) s'écrit

$$\max \langle c^*, x \rangle$$
$$Rx \leqslant b, \quad x \geqslant 0,$$

où

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -I & A & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -I & A & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -I & A \end{pmatrix}.$$

Ici 0 est une matrice nulle à n lignes et n colonnes et I une matrice unité de même dimension.

Soit $p = (p^1, p^2, \ldots, p^T)$ le vecteur des variables duales. Le problème dual s'écrit

$$\min \langle b, p\rangle$$
$$R'p \geqslant c^*, \quad p \geqslant 0,$$

ou

$$\min \langle x^0, p^1\rangle$$
$$A'p^t - p^{t+1} \geqslant 0, \ t = 1, \ldots, T-1, \ A'p^T \geqslant c, \qquad (4.28)$$
$$p^t \geqslant 0, \ t = 1, 2, \ldots, T.$$

La résolution des problèmes (4.26) et (4.28) aura recours à plusieurs lemmes.

LEMME 4.9. *Le ε-voisinage conique du vecteur $\bar{x}$ est un cône convexe.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que $\lambda x^1 \in C_\varepsilon(\bar{x})$ ($\lambda > 0$ quelconque) et $x^1 + x^2 \in C_\varepsilon(\bar{x})$ quels que soient x^1, x^2 de $C_\varepsilon(\bar{x})$. La première affirmation est évidente. Étant donné la dernière appartenance, il existe des nombres $\lambda > 0$, $\mu > 0$ tels que $\|\lambda x^1 - \bar{x}\| < \varepsilon$, $\|\mu x^2 - \bar{x}\| < \varepsilon$. On montre que $\|\gamma(x^1 + x^2) - \bar{x}\| < \varepsilon$, où $\gamma = \lambda\mu/(\lambda + \mu)$. En effet,

$$\|\gamma(x^1+x^2)-\bar{x}\| = \left\|\gamma(x^1+x^2) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\bar{x} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\bar{x}\right\| =$$
$$= \left\|\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\lambda x^1 - \bar{x}) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\mu x^2 - \bar{x})\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|\lambda x^1 - \bar{x}\| + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|\mu x^2 - \bar{x}\| < \varepsilon.$$

Le lemme ci-dessous affine l'affirmation du théorème 4.9.

LEMME 4.10. *Soit A une matrice primitive. On trouve pour tout $\varepsilon > 0$ un entier naturel $T_1(\varepsilon)$ tel que le vecteur $x^t = A^t x$ appartienne pour tout $x \in \mathbf{R}^n_+$ et $t > T_1(\varepsilon)$ au ε-voisinage conique $C_\varepsilon(x_A)$.*

DÉMONSTRATION. A la différence du théorème 4.9, le numéro $T_1(\varepsilon)$ ne dépend pas du vecteur x. Soit $e^1, e^2, \ldots, e^n$ les vecteurs de base de $\mathbf{R}^n$. On associe à tout e^i un nombre $T(\varepsilon, e^i)$ tel que $A^t e^i \in C_\varepsilon(x_A)$ pour $t > T(\varepsilon, e^i)$ (th. 4.9). Soit

$$T_1(\varepsilon) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} T(\varepsilon, e^i).$$

On a $A^t x = \sum_{i=1}^n x_i A^t e^i$ puisque $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$. Comme $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, et $C_\varepsilon(x_A)$ est un cône convexe par le lemme 4.9, $A^t x \in C_\varepsilon(x_A)$ pour $t > T_1(\varepsilon)$.

LEMME 4.11. *Si A est une matrice primitive, il existe un numéro T_0 tel que $A^t x > 0$ pour $t > T_0$ et chaque $x \geqslant 0$, $x \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. La matrice A étant indécomposable, on a $x_A > 0$. On prend $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit pour que le ε_0-voisinage conique du vecteur x_A ne contienne que des vecteurs positifs (à part 0). Selon le lemme précédent, on trouve $T_0 = T_1(\varepsilon_0)$ tel que $A^t x \in C_{\varepsilon_0}(x_A)$ pour $t > T_0$, i.e. $A^t x > 0$.

LEMME 4.12. *Il existe un nombre T_0 tel que toute solution $\{\tilde{p}^t\}$ du problème* (4.28) *vérifie les égalités*

$$A'\tilde{p}^t = \tilde{p}^{t+1} \tag{4.29}$$

quel que soit t, $1 \leqslant t \leqslant T - T_0$.

DÉMONSTRATION. On montre que le vecteur $\tilde{x}^T$ de la solution $\{\tilde{x}^t\}$ de (4.26) n'est pas nul. En effet, si $\tilde{x}^T = 0$, alors le maximum de la fonction économique $\langle c, x^T \rangle$ est 0 lui aussi. Or, on indique de suite un programme du problème (4.26) tel que la valeur de l'objectif soit supérieure à 0. On pose $x^t = \alpha A^{T-t} x_A$, $t = 1, 2, \ldots, T$. On constate sans peine qu'avec ce programme, toutes les contraintes de (4.26) à partir de la deuxième deviennent égalités. Si l'on choisit $\alpha > 0$ suffisamment petit, le fait $x^0 > 0$ donne $\alpha \lambda_A^{T-1} x_A \leqslant x^0$, et $\langle c, x^T \rangle = \alpha \langle c, x_A \rangle > 0$. Ainsi, $\tilde{x}^T \neq 0$. On remarque que les contraintes du problème entraînent $\tilde{x}^t \geqslant A^{T-t}\tilde{x}^T$. Avec le lemme 4.11, on obtient $\tilde{x}^t \geqslant A^{T-t}\tilde{x}^T > 0$ si $T - t \geqslant T_0$, i.e. si $t \leqslant T - T_0$. On applique la théorie de la dualité, il vient que toutes les contraintes associées du dual deviennent égalités par substitution de la solution.

LEMME 4.13. *On trouve un nombre T_1 tel que toute solution $\{\tilde{x}^t\}$ du problème* (4.26) *satisfasse pour chaque t, $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_0$ à l'égalité*

$$A\tilde{x}^{t+1} = \tilde{x}^t. \tag{4.30}$$

DÉMONSTRATION. On déduit de (4.29) $p^t = (A')^{t-1}p^1$, $t = 1, 2, \ldots, T - T_0$. On note que $p^1 \neq 0$ car (4.29) implique de plus $(A')^T p^1 \geqslant c \neq 0$. Si l'on applique le lemme 4.11 à la matrice A', on trouve donc un nombre T_0' tel que $p^t = (A')^{t-1}p^1 > 0$ pour $t - 1 \geqslant T_0'$. Il reste à poser $T_1 = 1 + T_0'$ et à recourir à la théorie de la dualité.

L'égalité (4.30) entraîne $\tilde{x}^{T-T_0-t} = A^t \tilde{x}^{T-T_0}$, si bien qu'on a l'affirmation du théorème du turnpike en appliquant le lemme 4.10 à la suite $\{\tilde{x}^t\}$, $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_0$.

Avec le lemme 4.10, il y a existence d'un nombre $T(\varepsilon)$ tel que $\tilde{x}^{T-T_0-t} \in C_\varepsilon(x_A)$ pour $t > T(\varepsilon)$. Cela veut dire que tout vecteur $\tilde{x}^t$, où $t \geqslant T_1$ et $t \leqslant T - T_0 - T(\varepsilon)$, est élément de $C_\varepsilon(x_A)$.

Si l'on introduit la notation $T_0 + T(\varepsilon) = T_2(\varepsilon)$, on obtient l'affirmation du théorème du turnpike. On a de plus que T_1 est indépendant de ε, mais ce résultat est sans importance.

§ 6. Principe du maximum pour les problèmes linéaires de commande optimale à temps discret

On appelle *problème linéaire de commande optimale à temps discret* un problème dynamique de la forme (voir ch. premier)

$$\max\left[\langle c^{T+1}, x^{T+1}\rangle + \sum_{t=1}^{T} \langle c^t, x^t\rangle + \sum_{t=0}^{T} \langle b^t, u^t\rangle\right]$$

$$x^{t+1} = A_t x^t + B_t u^t, \tag{4.31}$$

$$D_t u^t \leqslant d^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \tag{4.32}$$

$$x^0 = \hat{x},$$

avec

A_t une $n \times n$-matrice;
B_t une $n \times m$-matrice;
D_t une $l \times m$-matrice;
x^t, c^t, $\hat{x}$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$;
b^t, u^t des vecteurs de $\mathbf{R}^m$;
d^t un vecteur de $\mathbf{R}^l$.

On demande de définir les commandes successives $\bar{u}^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, vérifiant les contraintes (4.32) de sorte que cette suite et la suite associée $\bar{x}^t$ donnée par la formule (4.31) pour la valeur initiale $\bar{x}^0 = \hat{x}$ rendent maximum la fonction économique.

S'agissant des phénomènes à temps continu, des problèmes analogues relèvent de la théorie de la commande optimale. Le résultat fondamental de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin qui fournit une méthode efficace pour étudier les trajectoires optimales du mouvement.

Le problème (4.31), (4.32) est linéaire, si bien qu'on établit facilement un analogue parfait du principe du maximum.

L'analogie sera plus intuitive si l'on énonce, à l'intention des lecteurs au fait des éléments de la théorie des équations différentielles, le principe de Pontryagin (dans la suite, ce résultat ne sera pas utilisé).

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur qui décrit la position de l'objet commandé dans l'espace $\mathbf{R}^n$.

Le mouvement de l'objet est la variation de ses coordonnées en fonction du temps et des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_m$ appelées *commandes*, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$. La commande u varie elle aussi dans le temps encore que cette variation ne dépende dans un sens que de

l'organe de commande. Soit donné un ensemble fermé $U \subseteq \mathbf{R}^m$. Une commande $u(t)$ est dite *admissible* si le vecteur $u(t)$ appartient à chaque temps t à U et la fonction $u(t)$ est continue par morceaux.

On suppose connus l'état initial $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de l'objet commandé et la loi de mouvement représentée par un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre: $\dot{x}_i = f_i(x, u, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, avec f_i supposées continues par rapport à l'ensemble des variables et continûment dérivables en x_i et t.

Si l'on choisit une commande admissible $u(t)$, le système donné et la condition initiale $x(0) = x^0$ définissent de façon unique la trajectoire $x(t)$. Prenons la fonctionnelle $\int_0^T f_0(x, u, t)\,dt$, f_0 étant une fonction intégrable.

Le problème est de trouver parmi les commandes admissibles $u(t)$ celle qui, associée à la trajectoire $x(t)$, rend maximum pour $T > 0$ fixé la fonctionnelle donnée.

On introduit les nouvelles variables duales $\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ $\ldots, \psi_n(t)$ et on construit la fonction de Hamilton

$$H(\psi, x, u, t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x, u, t).$$

On considère le système *adjoint*

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soit $u^*(t)$ une commande optimale et $x^*(t)$ la trajectoire associée.

THÉORÈME (PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN). *Il existe une solution* $\psi^*(t) = (\psi^*_0(t), \psi^*_1(t), \ldots, \psi^*_n(t))$ *au système adjoint d'équations telle que*

$$H(\psi^*, x^*, u^*, t) = \max_{u \in U} H(\psi^*, x^*, u, t)$$

pour chaque t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *et le vecteur* $\psi^*(t)$ *n'est nul en aucun point du segment* $[0, T]$.

Maintenant on aborde de près le problème proposé (4.31), (4.32). On désigne par U_t l'ensemble des vecteurs u^t défini par (4.32), soit p^t les variables duales correspondant à la condition (4.31) pour $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. La dimension de p^t est n. L'analogue de la fonction de Hamilton s'écrit pour notre problème

$$H_t(p^t, x^t, u^t) = \langle c^t, x^t \rangle + \langle b^t, u^t \rangle + \langle p^t, A_t x^t + B_t u^t \rangle.$$

On prend comme système adjoint

$$p^{t-1} = \frac{\partial H_t}{\partial x^t}, \quad t = T, T-1, \ldots, 1,$$

ou

$$p^{t-1} = c^t + A_t' p^t, \quad t = T, \quad T-1, \ldots, 1, \quad p^T = 0. \tag{4.33}$$

On note que tous les termes de la fonction de Hamilton ne dépendent pas de u^t, si bien qu'on introduit une fonction plus simple, à savoir

$$H_t(u^t, p^t) = \langle b^t, u^t\rangle + \langle p^t, B_t u^t\rangle.$$

THÉORÈME 4.10 (PRINCIPE DU MAXIMUM). *Pour que la commande* $\bar{u}^t$ *du problème* (4.31), (4.32) *soit optimale, il faut et il suffit que*

$$H_t(\bar{u}^t, p^t) = \max_{u \in U_t} H_t(u, p^t), \tag{4.34}$$

p^t *étant défini par les formules* (4.33).

DÉMONSTRATION. Le problème proposé est un programme linéaire. On construit son dual. Pour cela, on détaille la matrice des contraintes du primal. Le vecteur des variables du problème original est $x = (u^0, x^1, u^1, x^2, \ldots, u^T, x^{T+1})$, et sa dimension est donc $(T+1)\times \times (n+m)$.

La matrice des contraintes est

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -B_0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & -B_1 & I & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_2 & -B_2 & I & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -A_T & -B_T & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & D_T & 0 \end{pmatrix},$$

et le vecteur second membre des contraintes s'écrit $\tilde{b} = (A_0 x^0, 0, 0, \ldots, 0)$.

On suppose que le vecteur $p^t = (p_1^t, \ldots, p_n^t)$ des variables duales correspond à la contrainte (4.31), $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, et le vecteur $q^t = (q_1^t, \ldots, q_l^t)$ à (4.32), $t = 0, 1, 2, \ldots, T$.

Le problème dual de (4.31), (4.32) prend la forme:

$$\min \langle p^0, A_0 x^0\rangle$$

$$-B_t' p^t + D_t' q^t = b^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \tag{4.35}$$

$$p^{t-1} - A_t' p^t = c^t, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$

$$p^T = 0, \quad q^t \geqslant 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T. \tag{4.36}$$

Chose à remarquer, le dual est construit conformément aux règles énoncées dans le chapitre III: les variables du primal ne sont pas assujetties à la condition de non-négativité, si bien que toutes les contraintes du dual sont du type égalité; la condition de non-négativité imposée aux variables q^t tient à ce que les contraintes associées (4.32) sont des inégalités.

Soit p^t, $t = T, T-1, \ldots, 1, 0$, une suite définie à partir de (4.36) pour $p^T = 0$. Dans ce cas,

$$H_t\,(u,\ p^t) = \langle b^t + B_t' p^t,\ u\rangle = \langle D_t' q^t,\ u\rangle. \tag{4.37}$$

On vient d'utiliser (4.35). Soit u un vecteur quelconque de U_t, i.e. $D_t u \leqslant d^t$. On a $\langle q^t, D_t u\rangle \leqslant \langle d^t, q^t\rangle$ parce que $q^t \geqslant 0$. Vu que $\langle D_t' q^t, u\rangle = \langle q^t, D_t u\rangle$, on déduit de (4.37)

$$H_t\,(u,\ p^t) \leqslant \langle d^t,\ q^t\rangle \tag{4.38}$$

quel que soit $u \in U_t$.

Aux termes du théorème de dualité pour le problème général de programmation linéaire, le vecteur réalisable $x^* = (\bar{u}^0, \bar{x}^1, \bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^T, \bar{x}^{T+1})$ est optimal pour (4.31), (4.32) si et seulement si

$$\langle D_t \bar{u}^t,\ q^t\rangle = \langle d^t,\ q^t\rangle, \quad t = 0, 1, \ldots, T,$$

pour tout vecteur q^t intervenant dans la solution du problème (4.31), (4.32).

On identifie avec (4.37), il vient

$$H_t\,(\bar{u}^t,\ p^t) = \max_{u \in U_t} H_t\,(u,\ p^t),$$

i.e. le résultat cherché.

Voici l'une des applications du principe du maximum. Supposons qu'on se pose souvent le problème (4.31), (4.32) avec divers états initiaux $\hat{x}$, vecteurs b^t, d^t et matrices B_t, D_t, i.e. tous les paramètres liés à u^t varient. Il suffit de calculer une fois p^t par les formules (4.33) pour ensuite résoudre à chaque pas t le problème d'optimisation (4.34) avec le vecteur variables u de dimension m, ce qui est sensiblement plus facile que d'avoir affaire au problème initial, où le vecteur x est $(T+1)(n+m)$-dimensionnel.

Exercices

1. Démontrer qu'une $n \times n$-matrice $A = (a_{ij})$ d'éléments $a_{ij} = i - j$ possède un point selle en stratégies pures.

2. Montrer que l'ensemble des stratégies optimales d'un jeu matriciel constitue un polyèdre convexe.

3. Soit A une matrice dont les colonnes sont formées de vecteurs non négatifs $\neq 0$. Montrer que la valeur du jeu de matrice A est positive.

4. Une matrice A est décomposable si et seulement s'il en est de A'. Démontrer.

5. Démontrer que si $\lambda_A = 0$, alors A est décomposable.

6. Soit A une matrice indécomposable. Vérifier si cette propriété est celle de A^2.

7. Etablir les propriétés suivantes des valeurs de Frobenius λ_A d'une matrice A : 1) $\lambda_A = \lambda_{A'}$; 2) $\lambda_{A^k} = \lambda_A^k$; 3) $\lambda_{\alpha A} = \alpha\lambda_A$, pour $\alpha \geqslant 0$; 4) $\lambda_A \geqslant \lambda_B$ si $A \geqslant B \geqslant 0$.

8. Une matrice A est indécomposable si et seulement s'il existe pour deux indices i et j quelconques, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, une suite $i = i_1, i_2, \ldots, i_m = j$ telle que $a_{i_t\, i_{t+1}} > 0$, $t = 1, 2, \ldots, m-1$. Démontrer.

9. Montrer que si $\{x^t\}$ est une trajectoire optimale arbitraire du problème (4.26), alors $\{\bar{x}^t\} = A^{T-t}x^T$, $t = 1, 2, \ldots, T$ est une autre trajectoire optimale.

10. Démontrer le théorème du turnpike pour le problème

$$\max \alpha$$
$$Ax^1 \leqslant x^0, \quad Ax^{t+1} \leqslant x^t, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$
$$x^T \geqslant \alpha\hat{x},$$

où A est une matrice primitive, $x^0 > 0$, $\hat{x} > 0$.

11. Etant donnée une matrice imprimitive A, démontrer que A^m est bloc-diagonale pour un entier naturel m.

12. Démontrer l'existence d'un vecteur $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $\alpha > 0$, tel que tout vecteur $x \in X$, $X = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n_+, \| x \| = 1, Ax < x\}$, vérifie $x \geqslant \alpha$. A est supposée indécomposable.

CHAPITRE V

THÉORIE DE LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

§ 1. Méthode du pivotage de Gauss-Jordan pour les systèmes d'équations linéaires

1. L'idée de la plupart des méthodes numériques pour les programmes linéaires est de réduire le système d'équations linéaires

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$

qui s'écrit en notations matricielles $Ax = b$, à un système de forme plus commode par la *méthode du pivotage de Gauss-Jordan* connue du cours d'Algèbre. Voici cette technique en ses grandes lignes.

On sélectionne le coefficient $a_{1i_1} \neq 0$ de la première équation, et on annule moyennant ce a_{1i_1} les coefficients de x_{i_1} des équations restantes. On procède comme suit. On fait la somme de l'équation de numéro r, $2 \leqslant r \leqslant m$, et de la première équation multipliée par $-a_{ri_1}/a_{1i_1}$, puis on divise celle-ci par a_{1i_1}. Cette *transformation élémentaire* laisse invariant l'ensemble des solutions du système. Le système équivalent obtenu est tel que la variable x_{i_1} figure seulement dans la première équation et elle est précédée de 1. On lui donne le nom de *variable de base*.

La procédure est répétée de proche en proche pour toutes les équations du système. Chaque fois on transforme toutes les équations, et la liste des variables de base se remplit peu à peu.

On effectue le pivotage de Gauss-Jordan jusqu'à ce qu'on établisse que, ou bien le système est incompatible (l'équation considérée a tous ses coefficients nuls et son second membre différent de 0), ou bien il n'y a plus d'équations « superflues » (dont tous les coefficients et le second membre sont nuls). Finalement, on a

$$x_i + \sum_{j \in \omega} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}, \quad i \in \sigma,$$

où $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ est l'ensemble des numéros des variables de base, $\omega = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \sigma$ étant l'ensemble des indices des variables hors base. Ici k, $k \leqslant m$, est le rang de la matrice A des coefficients du système primitif.

Nous dirons qu'on a obtenu un *système réduit* associé à l'ensemble σ des indices des variables de base.

On vérifie immédiatement que le système $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_k}\}$ des colonnes de la matrice A correspondant à l'ensemble des variables de base $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ doit nécessairement être linéairement indépendant.

Le système réduit présente l'avantage d'expliciter l'ensemble des solutions. On attribue aux variables hors base x_j, $j \in \omega$, des valeurs arbitraires et on calcule les variables restantes (de base) par les formules

$$x_i = \alpha_{i0} - \sum_{j \in \omega} \alpha_{ij} x_j, \quad i \in \sigma,$$

ce qui permet d'obtenir toute solution du système. En particulier, une solution est définie par le vecteur $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, où

$$x_i^0 = \begin{cases} \alpha_{i0} & \text{si } i \in \sigma, \\ 0 & \text{si } i \in \omega. \end{cases}$$

Soit A de rang m, i. e. $k = m$. Si l'on note

$$A_\sigma = (a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m})$$

la matrice formée de colonnes de A associées aux variables de base, alors A_σ est carrée non dégénérée d'ordre m. La transformation de Gauss-Jordan consiste en l'occurrence à multiplier le système proposé par A_σ^{-1}, et le système réduit s'écrit $A_\sigma^{-1}Ax = A_\sigma^{-1}b$.

Le résultat est vérifié de suite. En effet, on désigne par β_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, les éléments de la $m \times n$-matrice $A_\sigma^{-1}A$. On a, par définition d'une matrice inverse: $\beta_{ij} = 0$, $i \in \sigma$, et si $j \notin \sigma$, alors $\beta_{ii} = 1$. On introduit la notation $A_\sigma^{-1}b = \beta^0$ ($\beta^0 = (\beta_{10}, \beta_{20}, \ldots, \beta_{m0})$), auquel cas le système d'équations $A_\sigma^{-1}Ax = A_\sigma^{-1}b$ s'écrit

$$x_i + \sum_{j \in \omega} \beta_{ij} x_j = \beta_{i0}, \quad i \in \sigma.$$

La multiplication par une matrice non dégénérée laisse invariant l'ensemble des solutions du système d'équations (voir exer. 1), d'où l'on déduit aisément l'égalité $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ quels que soient i et j (voir exer. 2).

2. On se propose d'étudier le comportement de la forme linéaire $\langle c, x \rangle$ sur l'ensemble des vecteurs solutions du système $Ax = b$. A cet effet, on introduit une variable supplémentaire x_0 et on forme le système

$$x_0 - \langle c, x \rangle = 0, \quad Ax = b.$$

L'équation $x_0 - \langle c, x \rangle = 0$ est la première équation du système et x_0 a son coefficient $\neq 0$, si bien qu'on range par Gauss-Jordan cette variable supplémentaire parmi les variables de base. Si $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ est l'ensemble des variables de base pour $Ax = b$ et si

l'on connaît le système réduit correspondant (on estime que le rang de A est m), alors on cherche le système réduit associé à $\{0, i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ en représentant x_0 par les variables hors base :

$$x_0 = \langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i\in\sigma} c_i x_i + \sum_{j\in\omega} c_j x_j.$$

On y porte les valeurs de x_i, $i \in \sigma$, il vient

$$x_0 = \sum_{i\in\sigma} c_i \alpha_{i0} - \sum_{j\in\omega} \Big(\sum_{i\in\sigma} c_i \alpha_{ij} - c_j\Big) x_j.$$

Avec le vecteur x^0 ci-dessus, on a $\sum\limits_{i\in\sigma} c_i\alpha_{i0} = \langle c, x^0\rangle$. On introduit la notation $\alpha_{0j} = \sum\limits_{i\in\sigma} \alpha_{ij} - c_j$, $j \in \omega$, et le système réduit prend la forme

$$\begin{aligned} &x_0 + \sum_{j\in\omega} \alpha_{0j} x_j = \langle c, x^0\rangle, \\ &x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}, \quad i \in \sigma. \end{aligned} \tag{5.1}$$

§ 2. Programmes de base

L'une des méthodes numériques principales en programmation linéaire est la technique simpliciale pour le problème sous forme canonique

$$\begin{gathered} \max\ (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \end{gathered}$$

ou, en notations matricielles,

$$\begin{gathered} \max\ \langle c, x\rangle \\ Ax = b, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Comme a^j désigne la colonne j de la matrice A, le problème (5.2) s'écrit

$$\begin{gathered} \max\ (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \\ a^1x_1 + a^2x_2 + \ldots + a^nx_n = b, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Les colonnes a^j de A et les variables x_j sont donc en correspondance biunivoque. Il ressort de (5.3) que le vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, est un programme du problème (5.2) si et

seulement si le vecteur b est combinaison linéaire non négative des colonnes de A, dont les coefficients sont les coordonnées de x.

On a dit (§ 4, ch. premier) que la forme linéaire $\langle c, x\rangle$ atteint son maximum sur la frontière de l'ensemble $X = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax = b, x \geqslant 0\}$ des solutions réalisables du programme linéaire (5.2).

On attire l'attention sur la régularité de X (la matrice des contraintes $\bar{A}$ est de rang n : $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$, avec I une matrice unité d'ordre n. Selon le théorème 2.23 du § 4, ch. II, X possède des points extrêmes, et ces points sont en nombre fini (voir th. 2.19). Si le problème (5.2) est possible, alors il existe un point extrême optimal (ce résultat découle du théorème 3.2 du § 2, ch. III).

S'agissant du problème (5.2), on adopte donc la tactique suivante. En conformité avec le théorème 2.18 du § 4, ch. II, qui donne une condition suffisante et nécessaire pour qu'un point de X soit extrême, on choisit une sous-matrice $\bar{A}_\sigma$ de rang n de $\bar{A}$, on résout l'équation $\bar{A}_\sigma x = \bar{b}_\sigma$ (où $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots, 0)$) et on fixe le vecteur x_σ solution du système. On examine les valeurs de la fonction économique $\langle c, x_\sigma\rangle$ pour tous les vecteurs $x_\sigma \geqslant 0$ ainsi obtenus et on choisit x_σ qui rend $\langle c, x_\sigma\rangle$ maximum.

Il s'agit bien d'un procédé fini (i.e. on aboutit en un nombre fini d'opérations); n'empêche que dans la pratique ce nombre est de règle très élevé.

En effet, la matrice $\bar{A}$ possède C_{m+n}^n sous-matrices à n lignes et n colonnes. On les explore une à une pour sélectionner celles qui sont de rang n. Cela étant, ces matrices partielles non dégénérées peuvent s'avérer très nombreuses, sensiblement C_{m+n}^n. Or, il s'agit d'un nombre fort important (dès $m = 50$, $n = 50$, il est supérieur à 2^{60}). Et on a, de plus, à résoudre presque autant de systèmes $\bar{A}_\sigma x = \bar{b}_\sigma$! D'autre part, de nombreux programmes linéaires de caractère pratique renferment des centaines de contraintes et de variables.

Ainsi, l'exploration de tous les points extrêmes de l'ensemble X est en échec en programmation linéaire. Avec la méthode du simplexe, on diminue le nombre d'essais de sorte que les ordinateurs viennent à bout des problèmes de grande taille.

On passe aux définitions, à la théorie et à l'algorithme de la méthode simpliciale.

On va illustrer les notions principales et les grandes idées de la méthode par deux problèmes dont l'intérêt est purement théorique:

$$\begin{aligned} &\max\ (5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5) \\ &2x_1 + 6x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 2, \\ &-x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_5 = 1, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0; \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \max\ (x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5) \\ -x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

DÉFINITION 5.1. Un programme $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du problème (5.2) s'appelle *programme de base* si le système de vecteurs-colonnes a^j de A associés aux coordonnées x_j positives est linéairement indépendant.

THÉORÈME 5.1. *Si le problème* (5.2) *a un sens, il admet un programme de base.*

Ce résultat coïncide avec le lemme 2.1 du § 3, ch. II qui dit (en notations du chapitre présent) que si un vecteur b est combinaison linéaire non négative des vecteurs a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, alors il s'écrit comme combinaison linéaire non négative d'un sous-système libre des a^j.

THÉORÈME 5.2. *Un vecteur x est un programme de base du problème* (5.2) *si et seulement si x est un point extrême du polyèdre X des vecteurs réalisables.*

DÉMONSTRATION. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, où $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Le vecteur x respecte les contraintes suivantes de (5.2): $Ax = b$, $x_{k+1} = 0$, $x_{k+2} = 0, \ldots, x_n = 0$, et la matrice-support est de la forme

$$\bar{A}_\sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} & a_{m,k+1} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

(voir déf. 2.17 du support σ d'un point x (§ 4, ch. II)).

Les colonnes $a^1, a^2, \ldots, a^k$ de A étant linéairement indépendantes par définition d'un programme de base, il en est évidemment de même de toutes les n colonnes de la matrice $\bar{A}_\sigma$ qui est donc de rang n. Il en résulte par le théorème 2.18 que x est un point extrême.

La réciproque est démontrée de façon analogue.

THEOREME 5.3. *Parmi les programmes de base du problème* (5.2) *il existe un programme optimal.*

Le résultat découle des théorèmes 5.2 et 3.2.

Il est classique que tout sous-système libre de vecteurs peut être complété de façon à constituer un sous-système libre maximal. Si le rang de la matrice A est m, le sous-système libre maximal de ses colonnes contient m vecteurs. On énonce donc la

DEFINITION 5.2. Soit A une matrice de rang m. On appelle *base relative à un programme de base* un système libre quelconque de m colonnes de A dont toutes les colonnes associées aux coordonnées non nulles du programme de base.

DEFINITION 5.3. Un programme de base est dit *non dégénéré* si le nombre de ses coordonnées non nulles est égal au nombre de lignes de le matrice A, i.e. à m.

Ces définitions aidant, on dit qu'un programme de base non dégénéré est associé à une base unique, tandis qu'elles peuvent être plusieurs dans le cas dégénéré.

On conçoit que le problème (5.2) n'a de programmes de base non dégénérés que si A est de rang m, i.e. si aucune contrainte définie par A n'est « de trop ».

Mais on verra plus loin que tout programme de base de (5.2) n'est pas nécessairement non dégénéré pour A de rang m.

DEFINITION 5.4. Le problème (5.2) est dit *non dégénéré* si la matrice A est de rang m et tout programme de base du problème est non dégénéré.

Concrétisons les notions introduites moyennant les problèmes (5.4), (5.5).

Dans le premier cas, un programme de base est, par exemple, $x = (1/5, 2/5, 0, 2/5, 0)$ parce qu'il y a indépendance linéaire des colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de la matrice des contraintes, qui sont assosiées aux coordonnées positives du vecteur x. Il suffit, pour le vérifier, de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Ce programme de base est non dégénéré (le nombre de coordonnées positives de x et celui des lignes de la matrice des contraintes sont le même, à savoir 3).

En ce qui concerne le problème (5.5), le vecteur $x = (3/4, 0, 11/16, 0, 9/16)$ est un programme de base non dégénéré, tandis que le programme $x = (0, 1/2, 1/2, 0, 0)$ est dégénéré.

Voyons les conditions sous lesquelles un programme linéaire est non dégénéré. Soit, dans l'espace $\mathbf{R}^m$, l'enveloppe conique K des vecteurs $a^1, a^2, \ldots, a^n$ colonnes de la matrice A. Si le problème (5.2) a un sens, alors le vecteur b est élément du cône K parce qu'il est combinaison linéaire non négative (5.3) de a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Le concept de problème non dégénéré traduit la position du vecteur dans ce cône.

Illustrons nos dires par les problèmes (5.4), (5.5). Afin d'éviter des représentations géométriques dans l'espace de dimension 3, on recourt à l'artifice suivant. Soit le cône K pour le problème (5.4):

$$K = \mathrm{Co}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Le cône est dans l'espace de dimension 3 dont les points sont désignés par $u = (u_1, u_2, u_3)$. Soit, dans cet espace, l'hyperplan $u_3 = 1$ et son intersection $\bar{K}$ avec le cône K.

On voit sans peine que les coordonnées du point de rencontre de la demi-droite $\mu \begin{pmatrix}6\\7\\2\end{pmatrix}$ et de l'hyperplan $u_3 = 1$ s'obtiennent, par exemple, de façon suivante: on prend pour μ le nombre $1/2$ pour que la dernière coordonnée devienne 1. Il est clair par ces considérations que $\bar{K}$ est l'enveloppe convexe des points

$$\bar{a}^1 = (2, -1), \quad \bar{a}^2 = (0, 3), \quad \bar{a}^3 = (3, 7/2),$$
$$\bar{a}^4 = (4, 0), \quad \bar{a}^5 = (-3/2, -1).$$

Ici $\bar{a}^j$ sont les points d'intersection de la demi-droite μa^j, $\mu \geqslant 0$, et de l'hyperplan $u_3 = 1$.

L'intersection de μb et de $u_3 = 1$ est définie par le vecteur $\bar{b} = (2, 1)$. Le vecteur b est évidemment une combinaison linéaire non négative des vecteurs a^j (i.e. $b \in K$) si et seulement si b est une combinaison linéaire convexe des $\bar{a}^j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (i.e. $\bar{b} \in \bar{K}$).

Le polyèdre $\bar{K}$ pour le problème (5.4) est représenté sur la fig. 5.1.

On construit de même le polyèdre $\bar{K}$ pour le problème (5.5) (voir fig. 5.2).

La différence principale entre les deux cas est que le vecteur $\bar{b}$ de la fig. 5.2 est confondu avec le segment d'extrémités $\bar{a}^2$ et $\bar{a}^3$, i.e. le vecteur b est représentable sous forme de combinaison linéaire non négative des vecteurs a^2 et a^3: $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$. Il correspond à cette représentation le programme de base dégénéré $x = (0, 1/2,$

0, 0). Le vecteur $\bar{b}$ de la fig. 5.1 (problème (5.4)) n'est situé sur aucun des segments reliant deux points $\bar{a}^j$, i.e. b est combinaison linéaire non négative d'au moins trois vecteurs-colonnes de A.

Conformément à la définition 5.3, le problème (5.4) est non dégénéré et le problème (5.5) jouit de la propriété de dégénérescence.

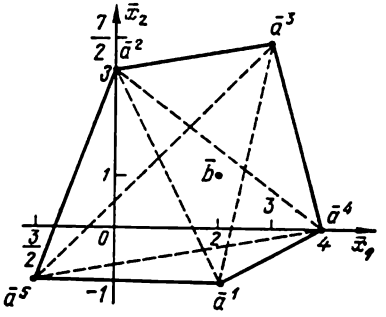


Fig. 5.1.

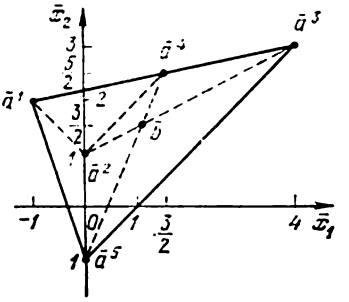


Fig. 5.2.

Ces exemples montrent qu'un problème dégénéré est plutôt rare, et il en est en effet ainsi dans la pratique. L'algorithme de simplexe prévoit néanmoins cette possibilité. N'empêche que notre désir de mettre en relief l'idée de base de la méthode nous obige à commencer par le cas non dégénéré.

Le cas de A de rang inférieur à m sera étudié plus loin.

§ 3. Méthode du simplexe pour un programme linéaire non dégénéré

1. Notations et définitions fondamentales. Soit x^0 un programme de base du problème (5.2) et

$$\{a^{i_1},\ a^{i_2},\ \ldots,\ a^{i_m}\} \tag{5.6}$$

a base associée.

On introduit les notations $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $x^0_\sigma = (x^0_{i_1}, x^0_{i_2}, \ldots, x^0_{i_m})$, $c_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$. Le fait de se donner la base définit bien le programme de base. En effet, si $A_\sigma = (a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m})$ est une matrice carrée d'ordre m composée de colonnes de A, éléments de la base (5.6), alors A_σ est non dégénérée et admet l'inverse A_σ^{-1}.

Comme $x^0_j = 0$ pour $j \notin \sigma$, on a $Ax^0 = A_\sigma x^0_\sigma$, i.e. $A_\sigma x^0_\sigma = b$, d'où

$$x^0_\sigma = A_\sigma^{-1} b. \tag{5.7}$$

Ainsi, la donnée de (5.6) définit de façon unique le vecteur x_σ^0 de dimension m, d'où x^0:

$$x_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \sigma, \\ x_j^0 & \text{si } j \in \sigma, \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.8}$$

On voit que la recherche d'un programme de base optimal va de pair avec celle d'une base convenable, système de m colonnes linéairement indépendantes de la matrice A. Cela étant, on fait naturellement de sorte que le vecteur (5.7) soit non négatif.

Soit un programme de base initial x^0. On le prend au départ sous l'hypothèse qu'il est obtenu d'une façon ou d'une autre avant qu'on utilise la procédure de base de la méthode simpliciale.

On associe à (5.2) le système d'équations

$$-x_0 + \langle c, x \rangle = 0, \quad Ax = b, \tag{5.9}$$

x_0 étant une variable auxiliaire.

Soit la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ b & a^1 & a^2 & \ldots & a^n \end{pmatrix}$$

dont la première ligne est composée de nombres et la seconde de vecteurs m-dimensionnels. C'est une matrice d'ordre $(m+1) \times \times (n+1)$. Le système de vecteurs

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ a^{i_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_2} \\ a^{i_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_{i_m} \\ a^{i_m} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

est linéairement indépendant dans $\mathbf{R}^{m+1}$, si bien que

$$B_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & c_{i_1} & c_{i_2} & \ldots & c_{i_m} \\ 0 & a^{i_1} & a^{i_2} & \ldots & a^{i_m} \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée non dégénérée d'ordre $(m+1) \times (m+1)$, i.e. B_σ admet l'inverse B_σ^{-1}.

La notion suivante joue un grand rôle dans la méthode du simplexe. La matrice

$$\mathfrak{A} = B_\sigma^{-1} \tilde{A}$$

s'appelle *tableau du simplexe* associé à la base (5.6) du programme de base x^0.

Les éléments de la première ligne du tableau seront désignés par $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Pour alléger l'exposé, on fait $\alpha_0 = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots \ldots, \Delta_n)$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$, d'où $\alpha_{0j} = \Delta_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Les éléments des autres lignes seront notés α_{ij}, $i \in \sigma$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, et on aura comme d'ordinaire pour la ligne de numéro $i \in \sigma$: $\alpha_i = (\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$.

On appellera $\alpha^j = (\alpha_{i_1 j}, \alpha_{i_2 j}, \ldots, \alpha_{i_m j})$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, le vecteur formé de m dernières coordonnées de la colonne j de $\mathfrak{A}$, si bien que la j-ième colonne du tableau du simplexe s'écrit $\begin{pmatrix} \Delta_j \\ \alpha^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{0j} \\ \alpha^j \end{pmatrix}$.

Les éléments du tableau ont un sens intuitif: si $z, y \in \mathbf{R}^{m+1}$, alors $y = B_\sigma z$ signifie que le vecteur z est formé de coordonnées dans la base (5.10) du vecteur y. Comme $B_\sigma \mathfrak{A} = \tilde{A}$, on établit facilement avec $B_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & c_\sigma \\ 0 & A_\sigma \end{pmatrix}$ que

$$A_\sigma \alpha^0 = b, \tag{5.11}$$

$$\langle c_\sigma, \alpha^0 \rangle - \Delta_0 = 0, \tag{5.12}$$

$$A_\sigma \alpha^j = a^j, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.13}$$

$$\langle c_\sigma, \alpha^j \rangle - \Delta_j = c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.14}$$

Il résulte de (5.11)

$$\alpha^0 = x^0_\sigma. \tag{5.15}$$

Le fait $x^0_j = 0$, $j \notin \sigma$, donne de suite

$$\Delta_0 = \langle c, x^0 \rangle. \tag{5.16}$$

La formule (5.13) montre que α^j est composé de coordonnées dans la base (5.6) du vecteur a^j; on déduit de (5.14)

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \langle c_\sigma, \alpha^j \rangle - c_j, \\ j &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Etant donnés ces résultats, le tableau général du simplexe s'écrit:

	0	1	2	...	k	...	n
Δ	$\langle c, x^0 \rangle$	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n
i_1	$x^0_{i_1}$	$\alpha_{i_1 1}$	$\alpha_{i_1 2}$	...	$\alpha_{i_1 k}$	...	$\alpha_{i_1 n}$
i_2	$x^0_{i_2}$	$\alpha_{i_2 1}$	$\alpha_{i_2 2}$	...	$\alpha_{i_2 k}$	...	$\alpha_{i_2 n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s	x^0_s	α_{s1}	α_{s2}	...	α_{sk}	...	α_{sn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i_m	$x^0_{i_m}$	$\alpha_{i_m 1}$	$\alpha_{i_m 2}$	...	$\alpha_{i_m k}$	...	$\alpha_{i_m n}$

On note que si l'on prenait non $\tilde{A}$, mais la matrice du système d'équations (5.9)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ b & 0 & a^1 & a^2 & \dots & a^n \end{pmatrix},$$

on aurait obtenu en multipliant par B_σ^{-1} une matrice composée de coefficients du système réduit (5.1). Cela étant, la deuxième colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 \in \mathbf{R}^m$, est vide de signification (elle ne varie pas avec le changement de base), et on a bien fait de la supprimer.

Une autre chose à noter, la colonne a^j du tableau du simplexe $\mathfrak{A}$ est pour $j \in \sigma$ un vecteur unité de l'espace $\mathbf{R}^m$. En effet, le vecteur α^j est formé, on le déduit de (5.13), de coordonnées dans la base (5.6) de a^j. Si $j \in \sigma$, le vecteur a^j figure lui-même dans le système (5.6).

Comme un vecteur se décompose d'une manière et d'une seule dans une base, on a

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & j \in \sigma, \quad i \neq j, \\ 1, & j \in \sigma, \quad i = j. \end{cases}$$

2. Transformation du tableau du simplexe dans un changement de base. L'idée de base de la méthode du simplexe est de trouver un autre programme de base x^1 tel que la base associée diffère de la base relative à x^0 par un seul vecteur.

Soit $s = i_t \in \sigma$,

$$\{a^{i_1}, a^{i_2}, \dots, a^{i_{t-1}}, a^k, a^{i_{t+1}}, \dots, a^{i_m}\}, \tag{5.18}$$

$k \notin \sigma$, une nouvelle base de $\mathbf{R}^m$. Le système de vecteurs

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ a^{i_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{i_{t-1}} \\ a^{i_{t-1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_k \\ a^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_{t+1}} \\ a^{i_{t+1}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{i_m} \\ a^{i_m} \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

constitue une base de $\mathbf{R}^{m+1}$.

On note $B_{\sigma 1}$ la matrice formée de ces vecteurs, auquel cas c'est une matrice carrée d'ordre $(m+1) \times (m+1)$ qui possède l'inverse.

On rappelle (voir [1]) que la *matrice de passage* à une nouvelle base est par définition une matrice dont les colonnes ont pour éléments les anciennes coordonnées des nouveaux vecteurs de base.

Si v^r est un vecteur unité de $\mathbf{R}^{m+1}$, $r = 0, 1, 2, \dots, m$, la matrice de passage de la base (5.10) à la base (5.19) s'écrit

$$Q = \left(v^0, v^1, \dots, v^{t-1}, \begin{pmatrix} \Delta_k \\ \alpha^k \end{pmatrix}, v^{t+1}, \dots, v^m \right),$$

et $B_{\sigma 1} = B_\sigma Q$. Dans ce changement de base, tout vecteur $y \in \mathbf{R}^{m+1}$ dont les composantes dans (5.1) étaient représentées par z, i.e. $y = B_\sigma z$, a dans la nouvelle base les composantes décrites par le vecteur $\bar{z}$ qu'on trouve facilement par la substitution $B_\sigma = B_{\sigma 1} Q^{-1}$: $y = B_{\sigma 1}(Q^{-1}z)$, i. e. $\bar{z} = Q^{-1} z$.

On a donc pour les nouvelles coordonnées des colonnes de $\mathfrak{A}$:

$$\begin{pmatrix}\overline{\Delta}_j\\ \overline{\alpha}^j\end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix}\Delta_j\\ \alpha^j\end{pmatrix}, \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

On note $\overline{\mathfrak{A}}$ la matrice composée de colonnes $\begin{pmatrix}\overline{\Delta}_j\\ \overline{\alpha}_j\end{pmatrix}$, i.e. $\overline{\mathfrak{A}} = Q^{-1}\mathfrak{A}$, ou $Q\,\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$. On se propose de calculer les éléments de $\overline{\mathfrak{A}}$ sous forme explicite et on procède comme suit (sans préciser la forme de Q^{-1} encore que cela ne présente pas de difficulté).

On écrit pour les lignes de $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{A}}$:

$$\alpha_0 = \overline{\mathfrak{A}}'v^0, \quad \alpha_i = \mathfrak{A}'v^r, \quad i \in \sigma, \quad i = i_r, \tag{5.20}$$

$$\overline{\alpha}_i = \overline{\mathfrak{A}}'v^r, \ \overline{\alpha}_k = \overline{\mathfrak{A}}'v^t, \ \overline{\alpha}_0 = \overline{\mathfrak{A}}'v^0, \quad i \in \sigma, \ i = i_r, \ i \neq s. \tag{5.21}$$

Dans ce cas, $\alpha_i - \overline{\alpha}_i = (\mathfrak{A}' - \overline{\mathfrak{A}}')v^r$ ou

$$\alpha_i - \overline{\alpha}_i = \overline{\mathfrak{A}}'\ (Q' - I)\ v^r, \quad i = 0, \quad i \in \sigma, \ i = i_r. \ i \neq s, \tag{5.22}$$

avec I une $(m+1) \times (m+1)$-matrice unité. Q sous forme explicite entraîne

$$(Q' - I)\ y = \left(\left\langle y,\ \begin{pmatrix}\Delta_k\\ \alpha^k\end{pmatrix}\right\rangle - y_t\right)v^t \tag{5.23}$$

pour tout $y = (y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots, y_m)$.

En particulier,

$$(Q' - I)v^r = \alpha_{ik}v^t, \quad i = i_r\ , \quad r \neq t, \tag{5.24}$$

$$(Q' - I)v^t = (\alpha_{sk} - 1)v^t, \tag{5.25}$$

$$(Q' - I)v^0 = \alpha_{0k}v^t. \tag{5.26}$$

On utilise (5.22) et (5.25), il vient

$$\alpha_s - \overline{\alpha}_k = (\alpha_{sk} - 1)\overline{\mathfrak{A}}'v^t = (\alpha_{sk} - 1)\ \overline{\alpha}_k,$$

d'où

$$\overline{\alpha}_k = \frac{1}{\alpha_{sk}}\alpha_s. \tag{5.27}$$

On a à partir de (5.22), (5.24) et (5.27)

$$\alpha_i - \overline{\alpha}_i = \alpha_{ik}\overline{\mathfrak{A}}'v^t = \overline{\alpha}_{ik}\alpha_k = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}}\alpha_s,$$

i.e.

$$\overline{\alpha}_i = \alpha_i - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}}\alpha_s. \tag{5.28}$$

On déduit notamment de (5.26)

$$\overline{\alpha}_0 = \alpha_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}}\alpha_s. \tag{5.29}$$

Evidemment, $\alpha_{sk} \neq 0$, sinon il y a dégénérescence de la matrice Q, i.e. (5.18) n'est pas une base.

Le sens des transformations (5.27) à (5.29) est évident: on fait la somme de la ligne i de $\mathfrak{A}$ et de la ligne α_s de coefficient $-\alpha_{ik}/\alpha_{sk}$ tel que $\overline{\alpha}_{ik} = 0$, puis on divise la ligne α_s par α_{sk} de façon qu'on ait $\overline{\alpha}_{kk} = 1$. Finalement, la colonne $\left(\frac{\overline{\Delta}_k}{\overline{\alpha}^k}\right)$ de $\overline{\mathfrak{A}}$ est le vecteur unité $v^t \in \mathbf{R}^{m+1}$, comme il se doit pour le tableau du simplexe vu que le vecteur a^k entre maintenant dans la base et y occupe la place de numéro t.

3. Théorie et règles de la méthode du simplexe. La première ligne α_0 du tableau joue un rôle particulier. On s'en rend compte sur l'exemple du dual de (5.2):

$$\begin{aligned} &\min \ \langle b, p\rangle, \\ &A'p \geqslant c, \end{aligned} \tag{5.30}$$

où $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

On fait correspondre à la base (5.6) relative au programme de base x^0 de (5.2) le vecteur p^0 m-dimensionnel défini par la formule $p^0 = (A'_\sigma)^{-1}c_\sigma$, avec $c_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$.

Dans ce cas, $A'_\sigma p^0 = c_\sigma$, d'où l'on a à l'aide de (5.17) pour $\alpha_{0j} = \Delta_j$: $\Delta_j = \langle A'_\sigma p^0, \alpha^j\rangle - c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Avec la propriété connue $\langle A'_\sigma p^0, \alpha^j\rangle = \langle p^0, A_\sigma \alpha^j\rangle$ du produit scalaire et l'égalité (5.13), on obtient $\Delta_j = \langle p^0, a^j\rangle - c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. En notations matricielles, ce système d'équations s'écrit $\Delta = A'p^0 - c$. D'où la propriété importante des éléments Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, de la première ligne du tableau du simplexe: le vecteur $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ est non négatif si et seulement si le vecteur p^0 est une solution réalisable du problème (5.30). Et voici une autre caractéristique de p^0:

$$\langle b, p^0\rangle = \langle b, (A'_\sigma)^{-1}c_\sigma\rangle = \langle A_\sigma^{-1}b, c_\sigma\rangle = \langle x_\sigma^0, c_\sigma\rangle.$$

Finalement, l'égalité (5.16) donne

$$\langle b, p^0\rangle = \langle c, x^0\rangle. \tag{5.31}$$

Fort de ces résultats, on énonce le

THÉORÈME 5.4. *Si le vecteur $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ est non négatif, alors le programme de base initial x^0 est optimal pour le problème* (5.2); *le vecteur p^0 est un programme optimal du problème* (5.30).

DÉMONSTRATION. La non-négativité de Δ implique la même propriété du vecteur $A'p^0$. Autrement dit, p^0 est, on l'a établi, un programme de (5.30). Comme x^0 et p^0 vérifient l'égalité (5.31), on applique le lemme 3.2 (condition suffisante d'optimalité).

Ainsi, on établit facilement au vu du tableau du simplexe si oui ou non le programme de base x^0 est optimal. Il se trouve également que la condition $\Delta \geqslant 0$ du théorème 5.4 est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour qu'il y ait optimalité car si certains des nombres Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, sont négatifs, il existe un programme x^1 de (5.2) tel que $\langle c, x^1 \rangle > \langle c, x^0 \rangle$. On démontre ce résultat par le procédé simplicial de construction du programme x^1.

RÈGLE PREMIÈRE. *Si $\Delta_k < 0$, on fait entrer le vecteur a^k dans la base (dans le cas où $\Delta_j < 0$ pour plusieurs j, on prend pour k l'un quelconque de ceux-ci).*

Chose importante, si $\Delta_k < 0$, alors la colonne a^k de la matrice A ne se trouve pas dans la base (5.6) associée au programme de base x^0. En effet, la définition de p^0 entraîne que si $j \in \sigma$, alors $\langle \alpha^j, p^0 \rangle = c_j$, i.e. $\Delta_j = 0$.

Cette règle ne spécifie pas le vecteur a^s à éliminer de la base (5.6) (car une base contient au plus m vecteurs). Si l'on fait sortir du système (5.6) une colonne arbitraire, il se peut que le vecteur associé à la nouvelle base vérifie l'équation $Ax = b$ tout en ayant des coordonnées négatives, i.e. il n'est pas un programme. La règle 2 apporte les précisions voulues.

RÈGLE 2. *Si l'on sélectionne le vecteur a^k en tant que candidat à l'entrée dans la base,* (i.e. $\Delta_k < 0$), *alors on prend la colonne α^k du tableau, on choisit les indices $i \in \sigma$ des lignes pour lesquels $\alpha_{ik} > 0$ et on écrit les rapports x_i^0/α_{ik} pour ces i. Soit*

$$\theta = \min_{\alpha_{ik} > 0} \frac{x_i^0}{\alpha_{ik}}, \quad i \in \sigma,$$

et $s \in \sigma$ tel que $x_s^0/\alpha_{sk} = \theta$. Le vecteur a^s est à faire sortir de la base.

La règle est des fois inapplicable car tous les nombres α_{ik} de la colonne α^k sont non positifs. On stoppe la procédure de résolution parce qu'on a le

THÉORÈME 5.5. *Si $\Delta_k < 0$ et $\alpha^k \leqslant 0$, alors le problème* (5.2) *est impossible (la fonction économique $\langle c, x \rangle$ est non bornée sur l'ensemble des solutions réalisables).*

DÉMONSTRATION. Soit γ un nombre positif quelconque.
Prenons le vecteur $x(\gamma) = (x_1(\gamma), x_2(\gamma), \ldots, x_n(\gamma))$, où

$$x_j(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \sigma, \quad j \neq k, \\ x_j^0 - \gamma\alpha_{jk} & \text{si } j \in \sigma, \\ \gamma & \text{si } j = k. \end{cases}$$

La structure du vecteur $x(\gamma)$ montre que

$$Ax(\gamma) = \sum_{j \in \sigma} (x_j^0 - \gamma\alpha_{jk})\, a^j + \gamma a^k,$$

i. e.

$$Ax(\gamma) = A_\sigma x_\sigma^0 - \gamma A_\sigma \alpha^k + \gamma a^k.$$

Il résulte de (5.13): $A_\sigma \alpha^k = a^k$. Donc $Ax(\gamma) = b$. Etant donné $\gamma > 0$, $x_j^0 \geqslant 0$, $\alpha_{jk} \leqslant 0$, $j \in \sigma$, on a $x(\gamma) \geqslant 0$. Ainsi, $x(\gamma)$ est un programme du problème (5.2) et

$$\langle c, x(\gamma)\rangle = \langle c_\sigma, x_\sigma^0 - \gamma\alpha^k\rangle + \gamma c_k = \langle c_\sigma, x_\sigma^0\rangle - \gamma\, \langle c_\sigma, \alpha^k\rangle + \gamma c_k$$

On tient compte de (5.17) pour Δ_j, $j = k$, il vient $\langle c, x(\gamma)\rangle = \langle c, x^0\rangle - \gamma\Delta_k$. Il s'ensuit que $\langle c, x(\gamma)\rangle$ croît indéfiniment avec l'augmentation de γ parce que $\Delta_k < 0$.

Ainsi, on applique successivement les règles 1 et 2 si le problème (5.2) est possible et le vecteur x^0 n'est pas un programme optimal. Mais il faut être sûr que le système de vecteurs (5.18) formé en conformité avec le choix prescrit des indices k et s est bien une base. Puisque $\alpha_{sk} \neq 0$, cette propriété découle du

LEMME 5.1. *Soit* $\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$ *une base dans l'espace* $\mathbf{R}^m$, $a^k \in \mathbf{R}^m$ *un vecteur quelconque*: $a^k = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r a^r$. *Si le coefficient* α_s, $1 \leqslant s \leqslant m$, *n'est pas nul, alors le système de vecteurs* $\{a^1, a^2, \ldots, a^{s-1}, a^k, a^{s+1}, \ldots, a^m\}$ *est une autre base dans* $\mathbf{R}^m$.

DÉMONSTRATION. La base présumée contient m vecteurs, si bien qu'on démontre le lemme à condition de vérifier que tout vecteur y de $\mathbf{R}^m$ est combinaison linéaire de ces vecteurs. La chose est évidente du moment que y s'exprime en fonction de la base $\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$ et que le vecteur a^s de cette base est représenté par les vecteurs de la nouvelle base:

$$a^s = \frac{1}{\alpha_s}\left(a^k - \sum_{r \neq s} \alpha_r a^r\right).$$

On passe à la nouvelle base (5.18) à l'aide des formules (5.27) à (5.29).

On introduit la notation

$$\sigma^1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, k, i_{t+1}, \ldots, i_m\}.$$

On pose $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, où

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \sigma^1, \\ \bar{\alpha}_{j0} & \text{si } j \in \sigma^1. \end{cases} \tag{5.32}$$

Par construction $x^1_{\sigma 1} = \overline{\alpha}^0$. Si l'on note

$$c_{\sigma 1} = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_{t-1}}, c_k, c_{i_{t+1}}, \ldots, c_{i_m}),$$

$$A_\sigma = (a^{i_1}, \ldots, a^{i_{t-1}}, a^k, a^{i_{t+1}}, \ldots, a^{i_m}),$$

alors on a évidemment $Ax^1 = A_{\sigma 1} x^1_{\sigma 1}$, $\langle c, x^1 \rangle = \langle c_{\sigma 1}, x^1_{\sigma 1} \rangle$.

THEOREME 5.6. *Le vecteur x^1 est un programme de base du problème* (5.2) *et*

$$\langle c, x^1 \rangle = \langle c, x^0 \rangle - \frac{x^0_s}{\alpha_{sk}} \Delta_k.$$

La matrice $\overline{\mathfrak{A}}$ est le tableau du simplexe du programme de base x^1.

DÉMONSTRATION. On a $x^1_{\sigma 1} = \overline{\alpha}^0$, si bien que ce vecteur est formé de coordonnées dans (5.18) de b, donc $b = A_{\sigma 1} \overline{\alpha}^0 = A_{\sigma 1} x^1_{\sigma 1} = Ax^1$. Le vecteur x^1 est évidemment $\geqslant 0$ si et seulement si $\overline{\alpha}^0 \geqslant 0$. On a par les formules (5.27) et (5.28)

$$\overline{\alpha}_{k0} = \frac{1}{\alpha_{sk}} \alpha_{s0}, \quad \overline{\alpha}_{i0} = \alpha_{i0} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}} \alpha_{s0} \quad \text{pour} \quad i \in \sigma, \ i \neq s.$$

Comme $\alpha_{i0} \geqslant 0$, $i \in \sigma$, $\alpha_{sk} > 0$ d'après la règle 2, on a $\overline{\alpha}_{k0} \geqslant 0$. Il nous reste, pour établir la non-négativité de $\overline{\alpha}^0$, à vérifier l'inégalité

$$\alpha_{i0} \geqslant \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}} \alpha_{s0} \quad \text{pour} \quad i \in \sigma, \ i \neq s.$$

Si l'indice i est tel que $\alpha_{ik} \leqslant 0$, l'inégalité est évidente. Si $\alpha_{ik} > 0$, elle équivaut à exiger $\alpha_{i0}/\alpha_{ik} \geqslant \alpha_{s0}/\alpha_{sk}$, condition remplie en vertu du choix de s.

La construction de x^1 entraîne la propriété de x^1 d'être un programme de base. Il en résulte de même que $\mathfrak{A}$ est le tableau simplicial de ce vecteur. Du moment que $\overline{\alpha}_0 = \langle c, x^1 \rangle$, l'affirmation concernant la forme linéaire $\langle c, x^1 \rangle$ découle de la formule (5.29).

CONSÉQUENCE. *Si le programme de base x^0 est non dégénéré, on a $\langle c, x^1 \rangle > \langle c, x^0 \rangle$.*

En effet, $x^0_s > 0$ sous l'hypothèse faite. Comme $\Delta_k < 0$, $\alpha_{sk} > 0$, on obtient le résultat voulu.

4. Algorithme de simplexe. Le schéma de l'algorithme de simplexe que nous allons décrire, ne saurait être utile au programmeur car il donne une idée générale de la procédure de calcul sans indiquer de nombreux artifices spéciaux, qui permettent d'utiliser au mieux les possibilités des calculateurs électroniques.

Soit un tableau simplicial de départ $\mathfrak{A}$.

ETAPE PREMIÈRE. Tester les inégalités $\Delta_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Si elles sont justes, le programme x^0 calculé par la formule (5.8) est

optimal. Dans le cas contraire, chercher un indice k, $1 \leqslant k \leqslant n$, tel que $\Delta_k < 0$.

ETAPE 2. Tester $\alpha^k \leqslant 0$. Si le vecteur α^k a toutes ses coordonnées α_{ik} non positives, on stoppe la procédure parce qu'il y a impossibilité pour (5.2). Dans le cas contraire, chercher un indice s tel que $\alpha_{sk} > 0$ et $\alpha_{s0}/\alpha_{sk} \leqslant \alpha_{i0}/\alpha_{ik}$ pour tout i, $\alpha_{ik} > 0$.

ETAPE 3. Avec les formules (5.27) à (5.29) construire un nouveau tableau simplicial noté $\overline{\mathfrak{A}}$ et initialiser les calculs.

Les étapes 1 à 3 constituent une *itération de la méthode du simplexe.*

Voici deux particularités essentielles de la méthode.

a) Le procédé est fini (on l'a démontré pour le moment en ce qui concerne un problème non dégénéré). Selon la conséquence du théorème 5.6, la valeur de la forme linéaire augmente d'une itération à l'autre, si bien que les vecteurs x^0, x^1, . . . de la suite correspondant à la suite d'itérations sont distincts deux à deux. Chaque programme de base x^0, x^1, . . . correspond à un point extrême du polyèdre X des solutions réalisables de (5.2). Puisque les points extrêmes sont en nombre fini, deux cas peuvent se présenter : ou bien on établit à une itération que la forme linéaire $\langle c, x\rangle$ est non bornée sur l'ensemble X, ou bien on aboutit à un programme optimal au bout d'un nombre fini d'itérations.

b) Tous les calculs consistent soit à identifier à 0 les élements du tableau (étapes 1 et 2), soit à utiliser les formules de l'étape 3. C'est un grand avantage de la méthode simpliciale car, dans la pratique, le nombre d'itérations nécessaires s'avère assez important, et le temps de calcul d'une itération sur ordinateur joue un rôle des plus essentiels.

§ 4. Programmes linéaires dégénérés

1. Plaçons-nous dans un problème (5.2) ayant des programmes de base dégénérés. La procédure de calcul de la méthode simpliciale se heurte à certaines difficultés qui sont d'ailleurs surmontables.

Si le rang de la matrice A est inférieur à m, alors tous les programmes de base du problème considéré sont dégénérés. On l'évite d'ailleurs (voir la recherche d'un programme de base initial du § 5). Mais le problème (5.2) peut avoir des programmes de base dégénérés même pour A de rang égal à m (par exemple (5.5)). On suppose dans ce paragraphe que la matrice A des contraintes du problème (5.2) est de rang m.

Soit un programme de base initial x^0 ayant $l < m$ coordonnées positives : $x^0_{i_r} > 0$, $r = 1, 2, \ldots, l$, $x^0_i = 0$ si $i \neq i_r$, $r = 1, 2, \ldots$ $\ldots, l$, et $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}, a^{i_{l+1}}, \ldots, a^{i_m}\}$ une base relative à x^0.

Avec le tableau simplicial $\mathfrak{A}$ associé à la base donnée, on effectue les trois étapes de l'algorithme de simplexe (voir n° 4, § 3), et on a tous les résultats du théorème 5.6 pour le nouveau programme de base x^1. Mais la conséquence correspondante n'a pas lieu. En effet, il se peut que l'indice s choisi par la règle 2 soit tel que $x_s^0 = 0$. Dans ce cas, x^1 défini par les formules (5.27) et (5.28) est égal à x^0, et l'itération se réduit à choisir pour x^0 la base (5.18) à la place de (5.6). Cela étant, la fonction économique reste évidemment constante: $\langle c, x^1\rangle = \langle c, x^0\rangle$.

On poursuit cependant les calculs dans l'espoir de voir augmenter la valeur de la fonction économique à l'itération suivante initialisée avec le vecteur x^1 et la nouvelle base. Après avoir obtenu les programmes successifs égaux $x^0, x^1, \ldots, x^7$ associés à des bases différentes, on risque cependant d'aboutir à une certaine itération au même vecteur x^0 et à l'ensemble de vecteurs (5.6) en qualité de base.

La chose arrive effectivement. On dit dans ce cas qu'il y a cyclage: bien que le problème (5.2) soit possible et que le programme x^0 ne soit pas optimal, la méthode du simplexe décrite au § 2 peut cycler sur le vecteur x^0 en essayant indéfiniment un même jeu de bases.

La pratique de la méthode du simplexe pour les modèles de phénomènes réels autorise à dire que la possibilité de cyclage est minime. Il n'empêche que des mesures ont été prises pour que cette possibilité ne se réalise jamais.

On a mis au point des variantes simpliciales qui permettent d'éviter le cyclage. L'un de ces procédés utilise le fait que la dégénérescence du problème tient à une mauvaise position du vecteur b de (5.2) dans le cône engendré par les vecteurs $\{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$ (voir fig. 5.2). On y remédie en déplaçant un peu b de façon à le remplacer par $b(\varepsilon)$ spécialement choisi, ce qui rend le problème (5.2) non dégénéré.

On ne se propose pas d'entrer dans le détail de cet artifice. Ci-dessous une autre façon d'approcher le problème de cyclage.

2. On introduit la notion d'ordre lexicographique dans l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$.

Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. On dit que le vecteur α est *lexicographiquement supérieur au vecteur nul de* $\mathbf{R}^{n+1}$, et on note $\alpha \succ 0$, si $\alpha \neq 0$ et α a sa première coordonnée non nulle positive, i.e. $\alpha_q > 0$, avec $q = \min\{j \mid \alpha_j \neq 0\}$.

Soit $\alpha' = (\alpha_0', \alpha_1', \ldots, \alpha_n')$. Le vecteur α est dit *lexicographiquement supérieur à* α', et on note $\alpha \succ \alpha'$, si $\alpha - \alpha' \succ 0$. Autrement dit, $\alpha \succ \alpha'$ si $\alpha \neq \alpha'$ et $\alpha_q > \alpha_q'$, où $q = \min\{j \mid \alpha_j \neq \alpha_j'\}$.

La relation $\succ$ présente deux propriétés importantes:

a) quels que soient $\alpha, \alpha' \in \mathbf{R}^{n+1}$, on a, ou bien $\alpha = \alpha'$, ou bien $\alpha \succ \alpha'$, ou encore $\alpha' \succ \alpha$;

b) la relation $\succ$ est transitive, i.e. si $\alpha \succ \alpha'$, $\alpha' \succ \alpha''$, alors $\alpha \succ \alpha''$.

On évite le cyclage si, après avoir choisi (par la règle 1) le vecteur a^k à faire entrer dans la base, on sélectionne plus rigoureusement le vecteur sortant (si la règle 2 le définit de façon non unique).

On renforce donc les conditions imposées aux programmes de base de la méthode du simplexe.

DÉFINITION 5.5. On dira que le programme de base x^0 est *strictement réalisable* si toutes les lignes α_i, $i \in \sigma$ (excepté α_0) du tableau simplicial associé sont lexicographiquement supérieures à 0 : $\alpha_i \succ 0$, $i \in \sigma$.

On conçoit qu'un programme x^0 non dégénéré est strictement réalisable (la première coordonnée $\alpha_{i0} = x_i^0 > 0$ de chaque vecteur α_i, $i \in \sigma$, est positive).

On admet que le programme de base initial x^0 est strictement réalisable.

RÈGLE 2^l. *Si le vecteur a^k est à faire entrer dans la base* (i.e. $\Delta_k < 0$), *on prend la k-ième colonne α^k du tableau du simplexe et toutes les lignes α_i pour lesquelles $\alpha_{ik} > 0$. On choisit l'indice s tel que*

$$\frac{1}{\alpha_{sk}}\alpha_s \prec \frac{1}{\alpha_{ik}}\alpha_i, \quad s,\ i \in \sigma,\ \alpha_{sk} > 0,\ \alpha_{ik} > 0, \tag{5.33}$$

et l'on fait sortir le vecteur a^s de la base.

La règle 2^l ne laisse aucun arbitraire sur le choix de s particularisant le vecteur a^s à faire sortir de la base. En d'autres termes, parmi les vecteurs α_i/α_{ik} il y a exactement un vecteur minimal au sens de la relation $\succ$. En effet, tous les vecteurs a_i, $i \in \sigma$, sont linéairement indépendants du moment que le rang de la matrice $\mathfrak{A}$ est égal à celui de la matrice A, i.e. au nombre m de lignes.

Si l'on suppose l'existence de deux vecteurs lexicographiquement minimaux α_s/α_{sk} et α_i/α_{ik}, cela signifie que $\alpha_s/\alpha_{sk} = \alpha_i/\alpha_{ik}$, ce qui contredit la propriété d'indépendance linéaire de α_s et α_i.

THÉOREME 5.7. *Si l'on agit par la règle 2^l, le nouveau programme de base x^1 est strictement réalisable* (i.e. $\bar{\alpha}_i \succ 0$, $i \in \sigma^1$) *et* $\bar{\alpha}_0 \succ \alpha_0$.

DÉMONSTRATION. Comme $\alpha_{sk} > 0$, $\alpha_s \succ 0$, on a $\bar{\alpha}_k = \alpha_s/\alpha_{sk} \succ 0$ (on utilise ici les formules (5.27) à (5.29)). Si i est tel que $\alpha_{ik} \leqslant 0$, on a évidemment $\alpha_s\alpha_{ik}/\alpha_{sk} \prec 0$ et $\bar{\alpha}_i \succ \alpha_i \geqslant 0$. Si $\alpha_{ik} > 0$, alors par la règle $2^l \alpha_i/\alpha_{ik} \succ \alpha_s/\alpha_{sk}$, d'où $\bar{\alpha}_i/\alpha_{ik} \succ 0$, i.e. $\bar{\alpha}_i \succ 0$. Cela étant, $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - \Delta_k\alpha_s/\alpha_{sk} \succ \alpha_0$ parce que $\Delta_k/\alpha_{sk} < 0$, $\alpha_s \succ 0$.

Le théorème 5.7 dit qu'à condition de commencer les calculs par un programme de base x^0 strictement réalisable, on trouve à chaque itération un programme strictement réalisable, et le cyclage ne se produira pas. En effet, si l'on suppose qu'au cours des itérations de la méthode simpliciale apparaît la suite des programmes strictement

réalisables $x^0, x^1, \ldots, x^q, \ldots$, alors $\alpha_0^{(0)} \prec \alpha_0^{(1)} \prec \ldots \prec \alpha_0^{(q)} \ldots$ par le théorème 5.7. La relation $\succ$ étant transitive, $\alpha_0^{(0)} \prec \alpha \prec_0^{(q)}$, i.e. x^q n'est égal à x^0 pour aucun q, d'où l'impossibilité du cyclage.

§ 5. Recherche d'un programme de base initial

Dans deux paragraphes précédents, on a décrit la procédure fondamentale de la méthode du simplexe, qui démarre à condition d'avoir un programme de base initial x^0 et la base associée $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}$. La recherche de x^0 consiste à trouver une solution non négative du système d'équations (5.2) $Ax = b$, $x \geqslant 0$. La méthode du simplexe a ceci de particulier que ce problème est lui aussi susceptible de ladite procédure.

On suppose, sans restreindre la généralité, que toutes les composantes du vecteur b second membre des contraintes du problème (5.2) sont non négatives: $b \geqslant 0$. En effet, si une composante b_i quelconque est négative, il suffit de multiplier l'équation correspondante $\langle a_i, x\rangle = b_i$ par -1.

Soit donc $b \geqslant 0$ et soit le programme linéaire à $n + m$ variables sous forme canonique:

$$\begin{aligned} &\max\ (-v_1 - v_2 - \ldots - v_m) \\ &\quad v_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\quad v_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad v_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ &\quad x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ v_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Il y a entre les problèmes (5.2) et (5.34) certaines relations. Le problème (5.34) a un sens: on vérifie sans peine que le vecteur $(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$ respecte toutes les contraintes. La fonction économique est majorée par le nombre 0, si bien que le problème est possible (th. 3.1). Soit d la valeur de (5.34). Deux cas peuvent se présenter: $d = 0$, $d < 0$.

THÉORÈME 5.8. *Si la valeur d du problème* (5.34) *est* 0, *alors le problème* (5.2) *a un sens. Si $d < 0$, l'ensemble admissible de* (5.2) *est vide.*

DÉMONSTRATION. Faisons l'hypothèse que (5.2) a un sens, et soit $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un programme. Evidemment, le vecteur $\tilde{x} = (0, 0, \ldots, 0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de dimension $n + m$ vérifie toutes les contraintes du problème (5.34), i.e. c'est un programme de ce problème, et la fonction économique vaut 0 sur $\tilde{x}$. Le programme $\tilde{x}$ est donc optimal pour (5.34) et $d = 0$. D'autre part, si $d = 0$, alors $v_1 = v_2 = \ldots = v_m = 0$ pour toute solution $(v_1, v_2, \ldots, v_m,$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$) du problème (5.34), donc le vecteur $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ est un programme de (5.2).

Le résultat démontré implique qu'à force d'aborder le problème auxiliaire (5.34), ou bien on trouve un programme de (5.2), ou bien on établit l'incompatibilité du système de contraintes de ce dernier et, partant, de ce problème même.

Le problème (5.34) se distingue essentiellement par le fait qu'on indique de suite pour lui le programme de base initial. En effet, le vecteur $(b, 0) = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$ satisfait à toutes les contraintes du problème, et le système de vecteurs unités $v^1, v^2, \ldots, v^m$ de $\mathbf{R}^m$ constitue la base associée. On vérifie aisément que $(b, 0)$ est un programme strictement réalisable. On a

$$\alpha_{10} = (b_1, 1, 0, \ldots, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),$$
$$\alpha_{20} = (b_2, 0, 1, \ldots, 0, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{m0} = (b_m, 0, 0, \ldots, 1, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}).$$

Etant donné $b_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, la première coordonnée non nulle de chaque vecteur α_i est positive, i.e. $\alpha_i \succ 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

La matrice des contraintes du problème (5.34) est évidemment de rang m, si bien qu'on applique la procédure simpliciale améliorée et la règle 2^l encore que le problème puisse être dégénéré.

Il y a lieu de dire de plus qu'on n'a pas dès la première itération à résoudre les systèmes d'équations pour définir les valeurs α_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$, car ces nombres coïncident dans ce cas avec les coordonnées des vecteurs a^j: $\alpha_{ij} = a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Si le problème (5.2) a un sens, la résolution de (5.34) est finie avec un vecteur de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ de dimension $n + m$. Comme on a commencé les calculs avec le programme de base strictement réalisable $(b, 0)$, une propriété de la méthode du simplexe veut que la solution obtenue soit un autre programme de base strictement réalisable. Le procédé de résolution consiste à faire sortir les vecteurs v^i des bases associées aux programmes de base successifs et à les remplacer par les vecteurs $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}$. Ceux-ci sont linéairement indépendants en tant qu'éléments de la base relative à un programme de base.

On a nécessairement $l = m$ pour (5.2) non dégénéré. Car si l'on a, par exemple, $l < m$, cela veut dire en particulier qu'à part $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}$, la base associée à x^0 intervenant dans le problème (5.34) contient des vecteurs v^i. On sait que, dans la méthode simpliciale, on aborde le problème (5.2) à condition que seuls figurent dans la base relative au programme initial x^0 les vecteurs-colonnes de la matrice A, si bien que le passage de (5.34) à (5.2) exige qu'on en chasse les vecteurs v^i, quand ils y existent.

Deux cas sont à envisager.

1) Si le rang de A est égal à m, on arrive toujours à faire sortir tous les v^i de la base mentionnée parce que tout système libre de m colonnes de la matrice A est une base dans $\mathbf{R}^m$. On procède comme suit.

On suppose que la base associée à x^0 renferme les vecteurs $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}$ plus les vecteurs $v^1, v^2, \ldots, v^{m-l}$. Prenons la décomposition dans cette base de la colonne j de A:

$$a^j = \sum_{r=1}^{l} \alpha_{rj} a^{i_r} + \sum_{i=1}^{m-l} \beta_{ij} v^i. \tag{5.35}$$

Si tous les nombres β_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m - l$, sont nuls pour chaque j, $l + 1 \leqslant j \leqslant n$, toute colonne a^j de la matrice A s'exprime en fonction des colonnes a^{i_r}, $r = 1, 2, \ldots, l$. Or, la chose est impossible du moment que A est de rang $m > l$. On trouve donc des indices k, $l + 1 \leqslant k \leqslant n$, et s, $1 \leqslant s \leqslant m - l$, tels que $\beta_{sk} \neq 0$. Cela signifie, selon le lemme 5.1, qu'on fait entrer a^k dans la base à la place de v^s par le procédé simplicial. Cela étant, le programme de base x^0 ne varie pas. En effet, si l'on définit le nombre θ par la règle 2 (ou par la règle 2^l), on a $\theta = 0$ vu que $x_k^0 = 0$ (les coordonnées non nulles de x^0 correspondent aux colonnes a^{i_r}, $r = 1, 2, \ldots, l$, et non à v^i). Avec le procédé mentionné, on forme pour x^0 la base constituée de m vecteurs-colonnes de A.

2) Si A est de rang h, $l \leqslant h < m$, on opère comme décrit dans le numéro précédent, et cela tant que la base associée au programme de base ne contient pas exactement h vecteurs-colonnes de la matrice A. Soient $a^1, a^2, \ldots, a^h$ ces colonnes, auquel cas toute colonne a^j de A s'écrit comme combinaison linéaire des a^i, $i = 1, 2, \ldots, h$. L'unicité de la décomposition dans une base de $\mathbf{R}^m$ fait que tous les nombres β_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m - l$, $j = 1, 2, \ldots, n$, de (5.35) (où l'on pose $l = h$) sont nuls.

On montre que toutes les contraintes de numéro $i = l + 1, l + 2, \ldots, m$, du problème (5.2) sont alors « superflues », i.e. l'équation $\langle a_i, x\rangle = b_i$ est pour $l + 1 \leqslant i \leqslant m$ une conséquence de l premières équations contraignantes du problème (5.2). En effet, les vecteurs $a^1, a^2, \ldots, a^l, v^{l+1}, \ldots, v^m$ constituent une base dans l'espace $\mathbf{R}^m$, et le déterminant formé de leurs coordonnées est donc non nul:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{ll} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \ldots & a_{l+1,l} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{ml} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Par conséquent, les vecteurs $\tilde{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l})$, $\tilde{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2l})$, $\ldots$, $\tilde{a}_l = (a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{ll})$ sont linéairement indépendants, i.e. ils forment une base de $\mathbf{R}^l$, et les vecteurs $\tilde{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{il})$, $l+1 \leqslant i \leqslant m$, s'expriment en fonction d'eux. Soit $\tilde{a}_i = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri}\tilde{a}_r$, $l+1 \leqslant i \leqslant m$, ou

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_{rj}, \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{5.36}$$

En outre, on obtient pour $j > l$ à partir de (5.35)

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{kj} a_{ik} \tag{5.37}$$

quel que soit i. Dans le cas $l+1 \leqslant i \leqslant m$, on utilise (5.36) et on substitue dans la formule ci-dessus l'expression de a_{ik}, il vient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{kj} \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_{rk}, \quad j = l+1, l+2, \ldots, n,$$

ou

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} \sum_{k=1}^{l} \alpha_{kj} a_{rk} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_{rj}. \tag{5.38}$$

(Ici on s'est servi de (5.37).)

Finalement,

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{rj} a_{rj}, \quad j = 1, 2, \ldots, l, l+1, \ldots, n$$

(voir (5.36) et (5.38)). Cela signifie que $a_i = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_r$, i.e. la i-ième ligne de A est pour $l+1 \leqslant i \leqslant m$ une combinaison linéaire des l premières lignes de cette matrice. Si le problème (5.2) a un sens, l'ensemble admissible du problème ne varie donc pas en biffant toutes les lignes d'indices supérieurs à l de A.

On se rappelle notre convention que la base associée au programme de base initial x^0 a pour éléments plusieurs premières colonnes de A et plusieurs derniers vecteurs unités de l'espace $\mathbf{R}^m$. On peut cependant dire en général que si l'on n'a pas réussi à faire sortir certains v^i de la base relative à x^0 obtenue à partir du problème (5.34), alors on supprime dans (5.2) les contraintes de mêmes indices que v^i restants, et la matrice ainsi formée a ses lignes en nombre égal à son rang.

Ainsi, le problème auxiliaire (5.34) permet non seulement de trouver le programme de base initial de (5.2), mais aussi ses contraintes linéairement indépendantes.

On applique ensuite la méthode du simplexe valable pour le cas où le rang de la matrice A est égal au nombre de ses lignes.

Avec le tableau simplicial formé à la dernière itération, on écrit de suite le tableau de départ pour le problème principal (5.2); il suffit de supprimer les colonnes $v^1, v^2, \ldots, v^m$ associées aux variables auxiliaires $v_1, v_2, \ldots, v_m$ et de remplacer la ligne des zéros par la ligne Δ dont les éléments sont calculés moyennant les formules (5.17).

§ 6. Un exemple de résolution numérique des programmes linéaires

On a déjà dit que seuls les ordinateurs sont à même d'aborder les problèmes de programmation linéaire qui se posent lorsqu'on étudie les phénomènes réels sur des modèles. Tous les centres de calcul importants possèdent des programmes universels de la méthode simpliciale pour des problèmes assez gros.

Notre but dans ce chapitre n'est pas de donner des recettes pour élaborer des programmes de mise en œuvre de la méthode simpliciale. On veut décrire des idées de base de ce procédé afin que les lecteurs puissent manipuler en connaisseurs les programmes disponibles et discerner les écueils à éviter.

La méthode simpliciale donne lieu à de nombreuses variantes qui permettent, par exemple, de tenir compte des contraintes bilatérales du type $a \leqslant x_i \leqslant b$ imposées aux variables x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sans les incorporer dans la matrice des coefficients, de chercher d'une autre manière le programme de base initial, et ainsi de suite. Quand on connaît la procédure de base de la méthode du simplexe, on s'oriente plus rapidement parmi ces procédés multiples et on les utilise au mieux.

On illustrera les concepts traités dans les paragraphes précédents sur l'exemple d'un programme linéaire simple.

On prend le problème (5.5) qu'on rend plus compliqué par adjonction d'une contrainte, somme de toutes les contraintes du problème:

$$\begin{aligned}
&\max\,(x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5)\\
-x_1 + \quad & \quad 4x_3 + 3x_4 \quad = 2,\\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 &= 3,\\
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2,\\
2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 \quad &= 7,\\
x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.&
\end{aligned} \tag{5.39}$$

On cherche d'abord un programme de base initial à l'aide du problème auxiliaire

$$\begin{aligned} \max\,(-v_1 - v_2 - v_3 - v_4) \\ v_1 - x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= 2, \\ v_2 + 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 &= 3, \\ v_3 + x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2, \\ v_4 + 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 &= 7, \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5;\ v_i \geqslant 0,\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{5.40}$$

On choisit comme programme de base de départ de ce problème le vecteur (2, 3, 2, 7, 0, 0, 0, 0, 0) associé à la base v^1, v^2, v^3, v^4. Les nombres α_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 9$, sont les coordonnées des vecteurs-colonnes a^j de A et des vecteurs v^i.

On applique la méthode simpliciale au problème (5.40). On trouve les paramètres de la première étape dans le tableau 5.1 dont les colonnes contiennent les coefficients des vecteurs décomposés dans la base du programme de base. Les colonnes a^j représentent les nombres α_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 5$, et la colonne b renferme les coefficients de b représentés dans la base, i.e. les coordonnées non nulles du programme de base. On trouve dans la ligne symbolisée par Δ les nombres Δ_j.

Tableau 5.1

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	—14	0	0	0	0	—4	—12	—16	—20	0
v^1	2	1	0	0	0	—1	0	4	3	0
v^2	3	0	1	0	0	2*	3	3	5	—1
v^3	2	0	0	1	0	1	3	1	2	1
v^4	7	0	0	0	1	2	6	8	10	0

Première itération. On peut faire entrer le vecteur a^1 dans la base parce que $-4 < 0$ (règle 1). Parmi les nombres α_{i1}, $1 \leqslant i \leqslant 4$, seuls $\alpha_{21} = 2$, $\alpha_{31} = 1$, $\alpha_{41} = 2$ sont positifs non nuls. On construit les vecteurs α_i/α_{i1}:

$$\alpha_2/\alpha_{21} = (3/2,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3/2,\ 3/2,\ 5/2,\ -1/2),$$
$$\alpha_3/\alpha_{31} = (2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1),$$
$$\alpha_4/\alpha_{41} = (7/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 0).$$

Le vecteur minimal au sens de la relation $\succ$ est α_2/α_{21} dont la première coordonnée est inférieure aux premières coordonnées des autres vecteurs. On pose $s = 2$ (l'élément correspondant est suivi d'un astérisque) et on fait sortir de la base le vecteur v^2. Cela étant, $\theta =$

$= 3/2$. On effectue les calculs par les formules (5.27) à (5.29) et on trouve un nouveau programme de base et une nouvelle base.

Le tableau 5.2 donne les résultats de la première itération. On a passé du programme (2, 3, 2, 7, 0, 0, 0, 0, 0) du problème (5.40) et de la base v^1, v^2, v^3, v^4 au programme (7/2, 0, 1/2, 4, 3/2, 0, 0, 0, 0) et à la base v^1, a^1, v^3, v^4, la valeur de la forme linéaire ayant augmenté de 6.

Tableau 5.2

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	-8	0	2	0	0	0	-6	-10	-10	-2
v^1	7/2	1	1/2	0	0	0	3/2	11/2	11/2	$-1/2$
a^1	3/2	0	1/2	0	0	1	3/2	3/2	5/2	$-1/2$
v^3	1/2	0	$-1/2$	1	0	0	3/2*	$-1/2$	$-1/2$	3/2
v^4	4	0	-1	0	1	0	3	5	5	1

Deuxième itération. On a $-6 < 0$, et on fait donc entrer a^2 dans la base. Cela étant, $\theta = \min\{7/3, 1, 1/3, 4/3\} = 1/3$. On atteint ce minimum pour $s = 3$, si bien qu'on sort v^3 de la base. Les résultats de l'itération sont représentés dans le tableau 5.3.

Tableau 5.3

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	-6	0	0	4	0	0	0	-12	-12	4
v^1	3	1	1	-1	0	0	0	6	6	-2
a^1	1	0	1	-1	0	1	0	2	3	-2
a^2	1/3	0	$-1/3$	2/3	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	1
v^4	3	0	0	-2	1	0	0	6*	6	-2

Ainsi, on a obtenu le nouveau programme de base (3, 0, 0, 3, 1, 1/3, 0, 0, 0) associé à la nouvelle base v^1, a^1, a^2, v^4. La valeur de la fonction économique a augmenté de 2.

Troisième itération. Comme $-12 < 0$, a^3 est introduit dans la base, et $\theta = \min\{1/2, 1/2, 1/2\} = 1/2$, i.e. le minimum est réalisé par trois indices 1, 2, 3 à la fois. On forme les vecteurs

$$\alpha_1/\alpha_{13} = (1/2,\ 1/6,\ 1/6,\ -1/6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1/3),$$

$$\alpha_2/\alpha_{23} = (1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 1/2,\ -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0{,}1,\ 3/2,\ -1),$$

$$\alpha_4/\alpha_{43} = (1/2,\ 0,\ 0,\ -1/3,\ 1/6,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1/3).$$

Le vecteur α_4/α_{43} étant minimal au sens de la relation $\succ$, on fait sortir v^4 de la base.

Chose à noter, si l'on sélectionne n'importe quel indice réalisant le minimum de la relation $\succ$ pour $\alpha_{i3} > 0$, on peut tomber par hasard sur a^2, ce qui n'est pas dans nos intentions du moment que nous

voulons remplacer les vecteurs v^i de la base. Pour les résultats de la troisième itération, voir le tableau 5.4.

Tableau 5.4

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
v^1	0	1	1	1	—1	0	0	0	0	0
a^1	0	0	1	—1/3	—1/3	1	0	0	1*	—4/3
a^2	1/2	0	—1/3	5/9	1/18	0	1	0	0	8/9
a^3	1/2	0	0	—1/3	1/6	0	0	1	1	—1/3

Le nouveau programme de base est (0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 0, 0) et la nouvelle base v^1, a^1, a^2, a^3. La forme linéaire a augmenté de 14.

Le programme est optimal pour le problème auxiliaire (5.40), et $x^0 = (0, 1/2, 1/2, 0, 0)$ est donc un programme réalisable de (5.39).

Le vecteur v^1 de la base relative à x^0 ne saurait être remplacé ni par a^4 ni par a^5. En effet, le coefficient de v^1 dans la décomposition dans la base associée à x^0 de tout vecteur a^j vaut 0. Cela signifie (voir § 4) qu'on peut supprimer la première équation du système de contraintes de (5.39) qui est superflue, et le rang de la matrice devient égal au nombre de lignes.

S'agissant du tableau 5.4, on doit rejeter la ligne et la colonne relatives au vecteur v^1.

On passe au problème (5.39). Il faut calculer Δ_j par les formules (5.17) et remplacer en conséquence la ligne Δ du tableau 5.4 (voir tabl. 5.4 *).

Tableau 5.4*

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	5/2	0	2/3	1/6	0	0	0	—1	—1/3
a^1	0	1	—1/3	—1/3	1	0	0	1*	—4/3
a^2	1/2	—1/3	5/9	1/18	0	1	0	0	8/9
a^3	1/2	0	—1/3	1/6	0	0	1	1	—1/3

Première itération. Comme $-1 < 0$, le vecteur a^4 est introduit dans la base. Cela étant, $\theta = \min \{0, 1/2\}$, et c'est a^1 qui est à faire sortir de la base. Les résultats de l'itération sont donnés dans le tableau 5.5.

Tableau 5.5

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	5/2	1	1/3	—1/6	1	0	0	0	—5/3
a^4	0	1	—1/3	—1/3	1	0	0	1	—4/3
a^2	1/2	—1/3	5/9	1/18	0	1	0	0	8/9
a^3	1/2	—1	0	1/2	—1	0	1	0	1*

Le nouveau programme de base $x^1 = (0, 1/2, 1/2, 0, 0)$ (on omet les valeurs des variables auxiliaires) et la base associée est a^4, a^2, a^3.

DEUXIÈME ITÉRATION. On a $-5/3 < 0$, si bien qu'on fait entrer a^5 dans la base; $\theta = \min \{9/16, 1/2\}$, et on sort donc de la base le vecteur a^3 (voir tabl. 5.6).

Ainsi, le nouveau programme de base est $x^2 = (0, 1/18, 0, 2/3, 1/2)$ et la nouvelle base a pour éléments a^4, a^2, a^5.

TROISIÈME ITÉRATION. On a $-2/3 < 0$, et on fait rentrer dans la base le vecteur a^1; $\theta = 1/16$. Par conséquent, le vecteur a^2 est à faire sortir de la base (voir tabl. 5.6).

Tableau 5.6

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	10/3	−2/3	1/3	2/3	−2/3	0	5/3	0	0
a^4	2/3	−1/3	−1/3	1/3	−1/3	0	4/3	1	0
a^2	1/18	5/9	5/9	−7/18	8*/9	1	−8/9	0	0
a^5	1/2	−1	0	1/2	−1	0	1	0	1

Le programme $x^3 = (1/16, 0, 0, 11/16, 9/16)$ est optimal, et la valeur maximale de la fonction économique est 27/8 (voir tabl. 5.7).

Tableau 5.7

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	27/8	−1/4	3/4	3/8	0	3/4	1	0	0
a^4	11/16	−1/8	−1/8	3/16	0	3/8	1	1	0
a^1	1/16	5/8	5/8	−7/16	1	9/8	−1	0	0
a^5	9/16	−3/8	5/8	1/16	0	9/8	−1	0	1

§ 7. Méthode révisée du simplexe

La simplicité des calculs à chaque étape de l'itération constitue, on l'a dit, la propriété fondamentale de la méthode du simplexe, qui en garantit l'efficacité. La rapidité d'action est suffisamment grande pour permettre, compte tenu des possibilités des machines modernes, de résoudre avec succès les programmes linéaires de grande dimension. La rapidité d'action n'est d'ailleurs pas le seul facteur décisif. Le volume de la mémoire interne joue en l'occurrence un rôle important.

Contrairement à la mémoire longue, la mémoire interne contient les paramètres qui sont traités à l'instant même. Et c'est justement son volume qui est le point le plus sensible des ordinateurs modernes.

Dans la méthode du simplexe, on garde dans la mémoire interne à chaque itération q le tableau $\mathfrak{A}^{(q)}$ à $(m+1)(n+2)$ nombres. Voyons s'il est nécessaire que la mémoire contienne le tableau tout entier.

L'itération consiste essentiellement à construire une nouvelle base. A cet effet, on doit connaître l'indice k, $\Delta_k < 0$, (pour déterminer le vecteur a^k à faire entrer dans la base) et les vecteurs α^k, α^0 (pour trouver l'indice s qui particularise la colonne a^s à éliminer de la base).

Les formules (5.27) et (5.28) donnant $\bar{\alpha}^k$ et $\bar{\alpha}^0$ correspondant à la nouvelle base ne renferment elles aussi que les composantes des vecteurs α^k et α^0:

$$\bar{\alpha}_{kj} = \frac{1}{\alpha_{sk}}\alpha_{sj}, \quad \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}}\alpha_{sj}, \quad i \neq k,$$

pour $j = 0$, $j = k$.

Si l'on veut définir le vecteur $\bar{\Delta}$ par la formule (5.29), on doit connaître la ligne s de la matrice $\mathfrak{A}$. Le numéro s étant inconnu, on dirait qu'il faut disposer de $\mathfrak{A}$ tout entière.

Prenons la représentation de Δ et $\bar{\Delta}$ au moyen des vecteurs p^0 et p^1:

$$p^0 = (A_0^{-1})'c^0, \tag{5.41}$$

$$\Delta_j = \langle a^j, p^0\rangle - c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.42}$$

$$p^1 = (A_1^{-1})'c^1,$$

$$\bar{\Delta}_j = \langle a^j, p^1\rangle - c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

On admet que la matrice A se trouve dans la mémoire longue et on organise les calculs comme suit.

On connaît le programme de base initial x^0, la base associée $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}$ et la matrice A_0^{-1}.

Etape première. Calculer p^0 par les formules (5.41).

Etape 2. Prendre de la mémoire longue le vecteur a^j, $j \notin \sigma$ ($\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$) et calculer Δ_j moyennant (5.42). Si $\Delta_j < 0$, on admet que $j = k$ et on passe à l'étape suivante. Si $\Delta_j \geqslant 0$, on prend a^j, $j \notin \sigma$, suivant. Finalement, ou bien on trouve un k, $k \notin \sigma$, tel que $\Delta_k < 0$, ou bien on établit que tous les $\Delta_j \geqslant 0$. Le dernier résultat signifie que x^0 est un programme optimal, i.e. on stoppe le processus.

Etape 3. Calculer le vecteur $\alpha^k = A_0^{-1}a^k$ et trouver l'indice s moyennant la règle 2 et le vecteur α^0.

Etape 4. Transformer la matrice A_0^{-1} et le vecteur α^0 par les formules

$$A_1^{-1} = Q^{-1}\ A_0^{-1}, \quad \bar{\alpha}^0 = Q^{-1}\alpha^0,$$

i.e. par la formule (5.28) où l'on calcule seulement les coordonnées $\bar{\alpha}_{ij}$, $j \in \sigma^1$, de la ligne $\bar{\alpha}_i$, et non toutes les $(\bar{\alpha}_{i0}, \bar{\alpha}_{i1}, \ldots, \bar{\alpha}_{in})$.

Retour à l'étape première.

La procédure décrite s'appelle la méthode révisée du simplexe. Son caractère distinctif est que la mémoire interne renferme $(m+1)\,m$ nombres (éléments de A_0^{-1} et vecteur α^0); on calcule en général certains Δ_j et non tous.

Exercices

1. Soit $X = \{x \mid Ax = b\}$, Q une matrice carrée non dégénérée qui a autant de colonnes que la matrice A a de lignes, $\widetilde{X} = \{x \mid QAx = Qb\}$. Démontrer que $X = \widetilde{X}$.

2. Prenons deux systèmes réduits d'équations de n variables

$$\text{a)}\quad x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j = \alpha_{i0},\ i \in \sigma,$$

$$\text{b)}\quad x_i + \sum_{j\in\omega} \beta_{ij}x_j = \beta_{i0},\ i \in \sigma.$$

On suppose que les systèmes sont équivalents, i.e. ils ont un même ensemble des solutions. Démontrer que $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$, $j \in \omega$, $i \in \sigma$.

3. Soient X l'ensemble des vecteurs réalisables d'un problème de programmation linéaire et $\langle c, x\rangle$ la fonction économique. Si $\langle c, x^1\rangle > \langle c, x^2\rangle$, il existe dans une région arbitrairement petite autour du point x^2 un point $x \in X$ tel que $\langle c, x\rangle > \langle c, x^2\rangle$. Démontrer. INDICATION. Prendre un point $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)\,x^2$, où $0 < \alpha < 1$.

4. Montrer qu'un extrémum local dans un problème de programmation linéaire est un extrémum global. INDICATION. Utiliser l'exer. 3.

5. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés linéaires $P_1 = x^1 + L_1$ et $P_2 = x^2 + L_2$ soient égales est $L_1 = L_2$ et $x^1 - x^2 \in L_1$.

6. Démontrer que si le problème

$$\max\ \langle c, x\rangle$$
$$Ax = 0,\quad x \geqslant 0$$

est possible, alors $x = 0$ en est une solution.

7. Montrer que dans le cas dégénéré la condition du théorème 5.4 n'est pas nécessaire pour qu'un programme de base soit optimal. Prenons donc le problème

$$\max\ x_1$$
$$x_1 + x_2 = 1,\quad x_2 + x_3 = 0,\quad x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0.$$

8. Soient X l'ensemble admissible du problème (5.2) et $x^0 \in X$. Une direction $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est dite admissible au point x^0 si $x^0 + \lambda s \in X$ pour $\lambda > 0$ suffisamment petits. Montrer que s est admissible en x^0 si et seulement si $As = 0$, $s_j \geqslant 0$ pour $x_j^0 = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

9. Démontrer que pour que $x^0 \in X$ soit un programme optimal du problème (5.2), il faut et il suffit que $\langle c, s\rangle \leqslant 0$ pour toute direction admissible au point x^0.

10. Démontrer que $x^0 \in X$ est un programme optimal du problème (5.2) si et seulement s'il existe des vecteurs $p^0 \in \mathrm{R}^m$ et $w \in \mathrm{R}^n$ tels que $c = A'p^0 - w$, $w \geqslant 0$, $\langle x^0, w\rangle = 0$. INDICATION. Utiliser l'implication $As = 0$, $\langle s, e^j\rangle \geqslant 0$ pour chaque j tel que $x_j^0 = 0 \Rightarrow \langle c, s\rangle \leqslant 0$ et le théorème 2.27.

11. Démontrer le théorème : si le vecteur Δ est non négatif, alors x^0 est une solution du problème (5.2). INDICATION. Utiliser les exercices 8 à 10.

CHAPITRE VI

MÉTHODE DUALE DU SIMPLEXE

On a justifié la méthode simpliciale en recourant entre autres aux relations entre un primal et son dual. Ces relations aidant, on propose d'autres schémas de calcul pour le problème sous forme canonique.

On expose dans ce chapitre la méthode duale du simplexe qui consiste en fait à appliquer la procédure du simplexe au problème dual, et la méthode duale sous forme lexicographique. Les deux procédés ont beaucoup de points communs, mais leurs « zones d'influence » ne sont pas les mêmes. Ainsi, on utilise le premier procédé dans le cas où l'on aborde de proche en proche plusieurs programmes linéaires dont les contraintes deviennent chaque fois plus nombreuses. Quant à la seconde technique, elle présente le même avantage tout en étant un peu plus commode en programmation linéaire en nombres entiers (voir ch. VII).

§ 1. Pseudo-programmes et règles de la méthode duale du simplexe

1. On rappelle qu'on construit au cours des itérations successives de la méthode simpliciale une suite de programmes $x^0, x^1, \ldots, x^q, \ldots$ du problème canonique étudié. On lui fait correspondre par la formule $p^q = (A'_\sigma)^{-1}c_\sigma$ la suite de vecteurs $p^0, p^1, \ldots, p^q, \ldots$ dont chaque élément est « presque » une solution réalisable du dual en ce sens que p^q respecte les contraintes associées aux vecteurs de base du programme de base courant x^q du primal.

Dans la méthode duale du simplexe, on forme une suite de vecteurs $x^0, x^1, \ldots, x^q, \ldots$ dont chaque élément est « presque » une solution réalisable du problème (5.2) en ce sens que x^q peut ne pas remplir la condition de non-négativité. Chaque terme de la suite correspondante $p^0, p^1, \ldots, p^q, \ldots$ est un programme du dual. Dès qu'on obtient à une itération x^q non négatif (i.e. un programme de (5.2)), x^q est automatiquement optimal.

2. On expose la méthode duale du simplexe pour le problème sous forme canonique

$$\begin{gathered} \max \langle c, x\rangle \\ Ax = b,\ x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{6.1}$$

La matrice A est supposée de rang m, m étant le nombre de lignes de A.

DÉFINITION 6.1. Un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérifiant le système $Ax = b$ s'appelle *vecteur de base* pour le problème (6.1) si le système de vecteurs-colonnes de A associés aux coordonnées non nulles de x est linéairement indépendant.

Faites attention: un vecteur de base d'un problème n'en est en général pas un programme.

DÉFINITION 6.2. On appelle *base associée à un vecteur de base x* tout système libre de m vecteurs-colonnes de A qui comprend toutes les colonnes correspondant aux coordonnées non nulles du vecteur x.

Soit x^0 un vecteur de base de (6.1) et

$$\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\} \tag{6.2}$$

la base associée. On reprend les notations déjà connues

$$\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}, \; c_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}),$$
$$x_\sigma = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}), \; A_\sigma = (a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}).$$

On fait correspondre à x^0 le vecteur m-dimensionnel

$$p^0 = (A'_\sigma)^{-1} c_\sigma. \tag{6.3}$$

DÉFINITION 6.3. Le vecteur de base x^0 est un *pseudo-programme* si

$$A'p^0 \geqslant c. \tag{6.4}$$

On associe à la base (6.2) relative à x^0 la matrice

$$B_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & c_{i_1} & c_{i_2} & \ldots & c_{i_m} \\ 0 & a^{i_1} & a^{i_2} & \ldots & a^{i_m} \end{pmatrix}$$

et le tableau simplicial $\mathfrak{A} = B_\sigma^{-1}\widetilde{A}$, où $\widetilde{A}$ est, on le rappelle, de la forme

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ b & a^1 & a^2 & \ldots & a^n \end{pmatrix}.$$

La seule différence par rapport au tableau analogue du chapitre V est que le vecteur $\alpha^0 = x_\sigma^0$ n'est pas assujetti à la condition de non-négativité.

On a $(\alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0n}) = A'p^0 - c$ (voir n° 3, § 2, ch. V). Il en résulte que x^0 est un pseudo-programme si et seulement si $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

La relation (5.31) entre les vecteurs x^0 et p^0 donne une condition nécessaire et suffisante d'optimalité du pseudo-programme x^0.

THÉORÈME 6.1. *Pour qu'un vecteur de base x^0 soit un programme optimal du problème* (6.1), *il faut et il suffit que x^0 soit un pseudo-programme et qu'il vérifie la condition de non-négativité $x^0 \geqslant 0$.*

3. Soit x^0 un pseudo-programme. Si l'on se donne l'ensemble σ^1 des indices des variables de base qui diffère de σ par un seul élément, alors on passe par les formules du ch. V à un nouveau vecteur de base x^1 et au tableau correspondant $\bar{\mathfrak{A}}$.

Dans la méthode simpliciale, on exigeait que x^1 soit un programme du problème (6.1), i.e. $\bar{\alpha}_{i0} \geqslant 0$, $i \in \sigma^1$, pour formuler ensuite les règles principales présidant au choix des indices k et s. S'agissant de la méthode duale, on veut que le vecteur $p^1 = (A^1_{\sigma^1})^{-1} c_{\sigma^1}$ constitue un programme du problème dual, i.e. $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, et que x^1 soit donc un pseudo-programme de (6.1).

RÈGLE 1 *. *Si la s-ième coordonnée α_{s0} du vecteur α^0 est négative,* i.e. $x^0_s < 0$, *alors a^s est à faire sortir de la base* (6.2).

Quelle est la règle donnant le vecteur a^k à faire entrer dans la base ? On se rappelle que

$$\bar{\alpha}_{0j} = \alpha_{0j} - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}} \alpha_{sj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

par la formule (5.29). Aussi on a $\bar{\alpha}_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sous la condition nécessaire

$$\alpha_{0j} \geqslant \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}} \alpha_{sj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.5}$$

Cela étant, on énonce la

RÈGLE 2 *. *Si l'on choisit le vecteur a^s pour sortir de la base, on prend le vecteur α_s, ligne du tableau simplicial $\mathfrak{A}$, et on cherche tous les indices j, $1 \leqslant j \leqslant m$, tels que $\alpha_{sj} < 0$. Soit $J = \{j \mid \alpha_{sj} < 0\}$ et $k \in J$ tel que*

$$\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}} = \max_{j \in J} \frac{\alpha_{0j}}{\alpha_{sj}}.$$

Le vecteur a^k est à faire entrer dans la base.

Selon cette règle, on n'introduit dans la base que les vecteurs hors base parce que si $j \in \sigma$, alors $\alpha_{sj} = 0$ pour $j \neq s$ et $\alpha_{ss} = 1$, i.e. $\alpha_{sj} \geqslant 0$, $j \in \sigma$.

Quelle est la différence entre 1*, 2*, d'une part, et les règles 1 et 2 de la méthode du simplexe, de l'autre ? *Primo*, l'ordre des vecteurs à faire entrer et sortir de la base n'est plus le même. *Secundo*, la règle 2* traite les éléments négatifs de la ligne s, tandis que ce sont les éléments positifs de la colonne k qui figurent dans la règle 2.

Il se peut que la règle 2* soit inopérante (tous les α_{sj}, $j = 1, 2, \ldots, n$, sont non négatifs). Dans ce cas, on arrête la méthode car on a le

THÉORÈME 6.2. *Si* $\alpha_{s0} < 0$ (i.e. $x_s^0 < 0$) *et* $\alpha_{sj} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *alors le problème* (6.1) *n'a pas de sens*, i.e. *l'ensemble X de ses solutions réalisables est vide.*

DÉMONSTRATION. On suppose qu'il existe un programme $\bar{x}$ du problème, i.e. $A\bar{x} = b$. Selon (5.11), $A_\sigma \alpha^0 = b$, i.e. $A_\sigma^{-1} A\bar{x} = \alpha^0$. On déduit de (5.13): $A_\sigma^{-1} a^j = \alpha^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ce qui signifie que la s-ième ligne $(A_\sigma^{-1}A)_s$ de la matrice $A_\sigma^{-1}A$ est

$$(A_\sigma^{-1}A)_s = (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}).$$

D'où $\alpha_{0s} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj}\bar{x}_j$: contradiction car $\alpha_{0s} < 0$, $\bar{x}_j \geqslant 0$, $\alpha_{sj} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

THÉORÈME 6.3. *Si le problème* (6.1) *a un sens, le vecteur* x^0 *est un pseudo-programme et l'indice k est choisi par la règle* 2*, *alors* $\bar{\alpha}_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, i.e. *le vecteur* x^1 *correspondant au nouveau tableau simplicial* $\bar{\mathfrak{A}}$ *est un pseudo-programme.*

DÉMONSTRATION. Etant donné $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (car x^0 est un pseudo-programme), l'inégalité (6.5) est évidemment vérifiée pour $\alpha_{sj} \geqslant 0$ vu que $\alpha_{sk} < 0$. Si $\alpha_{sj} < 0$, alors (6.5) est équivalente à $\frac{\alpha_{0j}}{\alpha_{sj}} \leqslant \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}}$, inégalité juste du moment que k est choisi conformément à 2*.

On identifie les valeurs de $\langle c, x^1\rangle$ et $\langle c, x^0\rangle$. On a $\bar{\alpha}_{00} = \langle c, x^1\rangle$ par définition d'un tableau du simplexe. On tire de (5.29)

$$\bar{\alpha}_{00} = \alpha_{00} - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}} \alpha_{s0}.$$

On a $\alpha_{s0} < 0$, $\alpha_{sk} < 0$, $\alpha_{0k} \geqslant 0$, si bien que $\bar{\alpha}_{00} \leqslant \alpha_{00}$, i.e. $\langle c, x^1\rangle \leqslant \langle c, x^0\rangle$. Si $\alpha_{0k} > 0$, alors $\langle c, x^1\rangle < \langle c, x^0\rangle$, et si $\alpha_{0k} = 0$, la valeur de la forme linéaire ne change pas avec le passage à une nouvelle base (à un nouveau pseudo-programme): la situation rappelle la méthode simpliciale appliquée à un problème dégénéré.

4. DÉFINITION 6.4. Un pseudo-programme x^0 est dit *non dégénéré* si l'on a $\alpha_{0j} > 0$ pour $j \notin \sigma$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Cette définition signifie, en termes de problème dual, que par définition 6.3 le vecteur p^0 satisfait à $(A'p^0)_j = c_j$, $j \in \sigma$. Le pseudo-programme x^0 est non dégénéré si $(A'p^0)_j > c_j$ pour tous les indices $j \notin \sigma$ restants. Géométriquement, si x^0 est un pseudo-programme, alors p^0 est un point extrême de l'ensemble P des vecteurs réalisables du problème dual (5.30). Cela résulte du théorème 2.18 parce que A'_σ est une sous-matrice du support du programme p^0, si bien que le rang de la matrice-support de p^0 est égal à m. Aussi la contrain-

te $\langle a^k, p\rangle = c_k$ n'est pas nécessaire pour donner le point extrême p^0 si $(A'p^0)_k = c_k$ pour $k \notin \sigma$. Dans le cas où tout point extrême p^0 du polyèdre P appartient, par exemple, exactement à m hyperplans, $\langle a^j, p^0\rangle = c_j$, cela ne peut avoir lieu.

DÉFINITION 6.5. Le problème (6.1) est dit *dual-non dégénéré* si chaque pseudo-programme de (6.1) est non dégénéré.

Avec cette définition, on énonce le

THÉORÈME 6.4. *Si le problème* (6.1) *est dual-non dégénéré, avec la méthode duale du simplexe appliquée une première fois au pseudo-programme* x^0, *on aboutit en un nombre fini d'itérations soit à la vacuité de l'ensemble admissible du problème, soit à un programme optimal.*

L'affirmation découle de suite des résultats précédents, du fait que les points extrêmes de l'ensemble P des programmes du dual sont en nombre fini et de l'impossibilité du cyclage (la valeur de la fonction économique $\langle c, x\rangle$ d'un problème dual-non dégénéré décroît d'un pseudo-programme à l'autre).

5. Faisons une remarque en ce qui concerne la recherche du pseudo-programme initial. Nous ne puiserons à la théorie de la méthode duale que pour décrire un algorithme de la programmation linéaire en nombres entiers, dont l'idée de base est de résoudre plusieurs problèmes successifs, chaque problème étant obtenu à partir du problème précédent par adjonction d'une nouvelle contrainte. Dans ce cas, la recherche d'un pseudo-programme de base ne présente aucune difficulté si l'on suppose que la solution du problème de numéro 1 est déjà trouvée, disons, par la méthode simpliciale (voir § 2).

Plus loin nous reviendrons sur la recherche des pseudo-programmes initiaux et les problèmes duals-non dégénérés (§§ 4 et 5).

§ 2. Méthode duale du simplexe pour un problème avec contrainte additionnelle

Soit x^* un programme de base optimal du problème (6.1). On adjoint aux contraintes de (6.1) une contrainte de type inégalité:

$$\begin{gathered}\max \langle c, x\rangle \\ Ax = b,\end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\langle a_{m+1}, x\rangle \leqslant b_{m+1}, \quad x \geqslant 0, \tag{6.7}$$

où $a_{m+1} = (a_{m+1,1}, a_{m+1,2}, \ldots, a_{m+1,n})$, b_{m+1} est un nombre.

Si x^* respecte (6.7), alors c'est un programme optimal du problème (6.6), (6.7) du moment que le fait d'introduire une nouvelle contrainte restreignant l'ensemble des solutions réalisables ne peut

que diminuer la valeur maximale de la fonction économique. Si $\langle a_{m+1}, x^* \rangle > b_{m+1}$, alors x^* n'est pas un programme du problème augmenté, si bien que la résolution de celui-ci appelle des calculs supplémentaires. On montre que le volume de calculs se trouve sensiblement diminué par application de la méthode duale du simplexe.

On met notre problème sous forme canonique par adjonction de la variable d'écart x_{n+1}:

$$\begin{gathered} \max \langle c, x \rangle \\ Ax = b, \end{gathered} \tag{6.8}$$

$$\langle a_{m+1}, x \rangle + x_{n+1} = b_{m+1}, \; x \geqslant 0, \; x_{n+1} \geqslant 0. \tag{6.9}$$

On montre que tout programme optimal $\tilde{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1})$ du problème (6.8), (6.9) correspond au programme optimal $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ de (6.6), (6.7). En effet, si $\tilde{x}$ est un programme du problème (6.8), (6.9), alors $\bar{x}$ en est un de (6.6), (6.7). D'autre part, si $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ est un vecteur réalisable quelconque du premier problème, alors $\tilde{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n, b_{m+1} - \langle a_{m+1}, x' \rangle)$ est un programme du second, donc $\langle c, \bar{x} \rangle \geqslant \langle c, x' \rangle$.

On note que $\tilde{x}^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n, b_{m+1} - \langle a_{m+1}, x^* \rangle)$ est un vecteur de base pour (6.8), (6.9) du moment que x^* est un vecteur de base de (6.1). En effet, $\tilde{x}^*$ vérifie toutes les contraintes de type égalité, et la seule coordonnée négative est $\tilde{x}^*_{n+1} = b_{m+1} - \langle a_{m+1}, x^* \rangle$. Cela étant, si $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}$ est la base relative à x^*, alors le système de vecteurs de dimension $m + 1$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^{i_1} \\ a_{m+1,\, i_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{i_2} \\ a_{m+1,\, i_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a^{i_m} \\ a_{m+1,\, i_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{6.10}$$

est manifestement la base associée au vecteur $\tilde{x}^*$, i.e. celui-ci est de base.

On construit le tableau simplicial $\tilde{\mathfrak{A}}$ pour la base donnée à l'aide de la remarque à la fin du n° 1, § 3, ch. V (qui dit que les éléments du tableau du simplexe sont les coefficients du système réduit). Il en résulte que $m + 1$ premières lignes de $\tilde{\mathfrak{A}}$ s'obtiennent des lignes correspondantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de la matrice $\mathfrak{A}$, tableau simplicial associé à la base du programme optimal x^*, par adjonction d'une coordonnée nulle correspondant à la nouvelle variable x_{n+1}. On trouve la dernière ligne α_{m+1} de $\tilde{\mathfrak{A}}$ en exprimant la variable de base x_{n+1} par des variables hors base. Soit ω l'ensemble des varia-

bles hors base, i.e. $\omega = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \sigma$, où $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, auquel cas

$$x_{n+1} = b_{m+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} x_j. \tag{6.11}$$

On y porte les expressions (5.1) des variables de base, il vient

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} x_i - \sum_{i \in \omega} a_{m+1,j} x_j = \\ &= b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} \left(\alpha_{i0} - \sum_{j \in \omega} \alpha_{ij} x_j\right) - \sum_{j \in \omega} a_{m+1,j} x_j = \\ &= b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} \alpha_{i0} - \sum_{j \in \omega} \left(a_{m+1,j} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} \alpha_{ij}\right) x_j. \end{aligned}$$

La dernière équation (obtenue à partir de (6.8)) du système réduit pour (6.7) s'écrit donc

$$x_{n+1} + \sum_{j \in \omega} \left(a_{m+1,j} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} \alpha_{ij}\right) x_j = b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} \alpha_{i0}.$$

D'où

$$\alpha_{m+1,0} = b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} \alpha_{i0}, \tag{6.12}$$

$$\alpha_{m+1,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \in \sigma, \\ 1 & \text{si} \quad j = n+1, \\ a_{m+1,j} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1,i} \alpha_{ij} & \text{si} \quad j \in \omega. \end{cases} \tag{6.13}$$

Le vecteur x^* étant optimal pour (6.1), on a $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Comme ces éléments (plus α_{00}) forment la première ligne de la matrice $\widetilde{\mathfrak{A}}$, on en déduit que $\widetilde{x^*}$ est un pseudo-programme de (6.6), (6.7).

On voit donc qu'étant donnés un programme de base optimal de (6.1) et le tableau simplicial final $\mathfrak{A}$, le problème (6.6), (6.7) n'est pas difficile à résoudre. On suit les recommandations ci-dessus, on construit immédiatement, moyennant les formules (6.12), (6.13), le tableau simplicial $\widetilde{\mathfrak{A}}$ associé au pseudo-programme $\widetilde{x^*}$, et on applique la méthode duale du simplexe au problème (6.6). Sous ces conditions, on aboutit en général au prix de calculs peu nombreux.

§ 3. Tableau simplicial sous forme lexicographique

L'effort de calcul de la méthode simpliciale décrite dans le chapitre V va essentiellement à trouver le tableau correspondant dont les éléments sont égaux aux coefficients du système réduit par Gauss-

Jordan qui correspond au vecteur de base choisi. Si l'on associe, par exemple à (6.1), le système

$$\begin{aligned} x_0 - \langle c, x\rangle &= 0, \\ Ax &= b, \end{aligned} \tag{6.14}$$

le système réduit s'écrit

$$x_0 + \sum_{j\in\omega} \alpha_{0j}x_j = \langle c, x^0\rangle, \tag{6.15}$$

$$x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j = \alpha_{i0}, \quad i \in \sigma, \tag{6.16}$$

avec $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ l'ensemble des indices des variables de base et $\omega = \{1, 2, \ldots, n\}\setminus\sigma$ l'ensemble des indices des variables hors base (voir § 1, ch. V). La matrice $\mathfrak{A}$ formée de coefficients du système (6.15), (6.16) s'appelle le *tableau du simplexe* (voir ch. V).

On obtient l'information nécessaire d'une autre manière. On introduit les vecteurs $c(x) = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où $x_0 = \langle c, x\rangle$. Le vecteur $c(x)$ de dimension $n + 1$ est solution du système (6.14) (et partant, du système équivalent (6.15), (6.16)) si et seulement si $Ax = b$.

On enseigne en Algèbre (voir [1]) que la solution générale du système d'équations (6.15), (6.16) s'écrit $c(x^0) + L$, avec $c(x^0)$ une solution particulière du système et L l'espace de toutes les solutions du système homogène

$$x_0 + \sum_{j\in\omega} \alpha_{0j}x_j = 0, \tag{6.17}$$

$$x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j = 0, \quad i \in \sigma. \tag{6.18}$$

On trouve facilement une solution particulière. C'est le vecteur $c(x^0)$, où $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, et

$$x_i^0 = \begin{cases} \alpha_{i0} & \text{si} \quad i \in \sigma, \\ 0 & \text{si} \quad i \in \omega. \end{cases}$$

Par construction, on définit l'ensemble L par le système fondamental de solutions. On note $x_\omega = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}})$, où $\omega = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-m})$. On obtient le système fondamental de (6.17), (6.18) si l'on fait le vecteur x_ω égal aux vecteurs successifs de la base orthonormée de l'espace $\mathbf{R}^{n-m}$.

Soit les notations suivantes:

$$\begin{aligned} v^1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{n-m}, \\ v^2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v^{n-m} &= \quad (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

On pose $x_\omega = -v^1$ et on calcule les variables de base par les formules

$$x_0 = -\sum_{j\in\omega} \alpha_{0j}x_j, \tag{6.19}$$

$$x_i = -\sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j, \quad i\in\sigma. \tag{6.20}$$

On désigne par β^{j_1} le vecteur $(n+1)$-dimensionnel ainsi obtenu. On trouve de même $\beta^{j_2}, \beta^{j_3}, \ldots, \beta^{j_{n-m}}$. Ici $\beta^j = (\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj})$, $j\in\omega$, où

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{si } i=0 \text{ ou } i\in\sigma, \\ 0 & \text{si } i\in\omega, i\neq j, \\ -1 & \text{si } i\in\omega, i=j. \end{cases}$$

Si l'on introduit la notation $D = (\beta^{j_1}, \beta^{j_2}, \ldots, \beta^{j_{n-m}})$, D est une matrice de dimension $(n+1)\times(n-m)$. Voyons certaines de ses propriétés. Soit $z = (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un vecteur quelconque qui vérifie le système homogène (6.17), i.e. $z\in L$. On décompose z par rapport aux vecteurs $\beta^{j_1}, \beta^{j_2}, \ldots, \beta^{j_{n-m}}$ qui forment une base de l'espace L:

$$z = \gamma_1\beta^{j_1} + \gamma_2\beta^{j_2} + \ldots + \gamma_{n-m}\beta^{j_{n-m}}.$$

Avec la structure spéciale des β^{j_q}, on définit aisément les coefficients γ_q. On obtient pour la coordonnée z_{j_q} de z: $z_{j_q} = -\gamma_q$, $q = 1, 2, \ldots, n-m$, i.e.

$$z = -(z_{j_1}\beta^{j_1} + z_{j_2}\beta^{j_2} + \ldots + z_{j_{n-m}}\beta^{j_{n-m}})$$

ou

$$z = -Dz_\omega, \tag{6.21}$$

où (rappelons-le!) $z_\omega = (z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_{n-m}})$.

En particulier,

$$\beta^j = -D\beta^j_\omega = Dv^q, \quad j\in\omega, \; j = j_q, \tag{6.22}$$

parce que

$$\beta^{j_q}_\omega = -v^q. \tag{6.23}$$

Comment la matrice D varie-t-elle lorsqu'on passe à une nouvelle base (à un nouveau vecteur de base)?

Soit x^1 un vecteur de base du problème (6.1) et

$$\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{t-1}}, a^k, a^{i_{t+1}}, \ldots, a^{i_m}\} \tag{6.24}$$

la base associée, $k\in\omega$. Soit $\bar{D}$ la matrice correspondant à la base (6.24) de façon décrite.

Si l'on introduit la notation

$$\omega^1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, k, i_{t+1}, \ldots, i_{n-m}\},$$

alors on a pour $\overline{D}$

$$z = -\overline{D}z_{\omega 1} \quad \forall z \in L, \tag{6.25}$$

$$\overline{\beta}^s = \overline{D}v^r, \ \overline{\beta}^{j_q} = \overline{D}v^q, \ q = 1, 2, \ldots, n-m, \ q \neq r. \tag{6.26}$$

On déduit de (6.21) et (6.25): $Dz_\omega = \overline{D}z_{\omega 1} \forall z \in L$. Il y a entre les projections z_ω et $z_{\omega 1}$ du vecteur z une relation simple: $z_{\omega 1} = z_\omega - (z_k - z_s)\, v^r$, $k = j_r$, $s = i_t$, car $v^r_q = 0$ pour $r \neq q$, $v^r_r = 1$. Dans ce cas,

$$Dz_\omega = \overline{D}z_\omega - (z_k - z_s)\, \overline{D}v^r. \tag{6.27}$$

On prend pour z le vecteur β^k, colonne j_r de la matrice D:

$$D\beta^k_\omega = \overline{D}\beta^k_\omega - (1 - \beta_{sk})\, \overline{D}v^r.$$

Etant donné (6.22) et (6.23),

$$Dv^r - \overline{D}v^r + (1 + \beta_{sk})\, \overline{D}v^r$$

ou $\beta^k = -\beta_{sk}\overline{\beta}^s$ (on a utilisé une deuxième fois (6.22) et (6.26)), i.e.

$$\overline{\beta}^s = -\frac{1}{\beta_{sk}}\beta^k. \tag{6.28}$$

Ainsi, on a la formule régissant la transformation de la k-ième colonne de D. On obtient les formules pour les colonnes restantes en posant $z = \beta^j$, $j \neq k$, $j = j_q$, dans (6.27):

$$D\beta^j_\omega = \overline{D}\beta^j_\omega - (0 - \beta_{sq})\, \overline{D}v^r.$$

On trouve $\beta^j = \overline{\beta}^j - \beta_{sk}\overline{\beta}^s$ moyennant (6.22), (6.23) et (6.26). On porte l'expression (6.28) de $\overline{\beta}^s$, il vient les relations

$$\overline{\beta}^j = \beta^j - \frac{\beta_{sj}}{\beta_{sk}}\beta^k, \quad j \in \omega, \ j \neq k. \tag{6.29}$$

Les formules (6.28) et (6.29) décrivent bien la conversion de la matrice D en $\overline{D}$ dans le passage de la base (6.2) à (6.24).

On établit la relation entre les vecteurs $c(x^0) = (x^0_0, x^0_1, \ldots, x^0_n)$ et $c(x^1) = (x^1_0, x^1_1, \ldots, x^1_n)$. On pose $z = c(x^1) - c(x^0) \in L$. Comme $c(x^1)_{\omega 1} = 0$, $c(x^0)_{\omega 1} = -x^0_s v^r$, on a $z_{\omega 1} = x^0_s v^r$, auquel cas (6.27) implique $c(x^1) - c(x^0) = -x^0_s \overline{D}v^r = x^0_s \overline{\beta}^k$. Avec (6.28), on obtient

$$c(x^1) = c(x^0) - \frac{x^0_s}{\beta_{sk}}\beta^k. \tag{6.30}$$

La formule (6.30) est donc identique à (6.29), i.e. la transformation du vecteur $c(x^0)$ et celle des colonnes β^j, $j \neq k$, de la matrice D

s'effectuent de façon analogue. On introduit la notation $c(x^0) = \beta^0$, i.e. $x_i^0 = \beta_{i0}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, auquel cas $j = 0$ ou $j \in \omega$, $j \neq k$ dans la formule (6.29).

La matrice

$$\mathfrak{B} = (\beta^0, \beta^{j_1}, \beta^{j_2}, \ldots, \beta^{j_{n-m}})$$

s'appelle *tableau simplicial sous forme lexicographique associé à la base* $\{a^{i_1} a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}$ *relative au vecteur de base* x^0.

§ 4. Méthode duale sous forme lexicographique

Le tableau lexicographique $\mathfrak{B}$ est, par construction, tel que sa colonne β^0 coïncide avec le vecteur $c(x^0) = (\langle c, x^0\rangle, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et sa ligne β_0 s'écrive $\beta_0 = (\langle c, x^0\rangle, \Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \ldots, \Delta_{j_{n-m}})$. Ainsi, $\mathfrak{B}$ renferme toute l'information nécessaire pour qu'on applique la méthode du simplexe et aussi sa variante duale.

Plaçons-nous dans le second cas et admettons que le problème (6.1) peut être dégénéré.

On précise la règle 2*.

Règle 2^{*l}. *Si l'on choisit le vecteur* a^s *pour sortir de la base, on prend le vecteur* β_s, *ligne s du tableau* $\mathfrak{B}$, *et on cherche tous les indices* j, $j \in \omega$, *tels que* $\beta_{sj} < 0$. *On prend ensuite les vecteurs* $\frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j$ *munis de ces j et on choisit k de sorte que* $\beta_{sk} < 0$ *et* $\frac{1}{\beta_{sk}}\beta^k \succ \frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j$ *pour tous les* $j \in \omega$ *tels que* $\beta_{sj} < 0$.

L'indice k est donc défini de façon unique. En effet, s'il existe un autre j tel que le vecteur $\frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j$ soit lexicographiquement maximal, alors

$$\frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j = \frac{1}{\beta_{sk}}\beta^k,$$

ce qui contredit la propriété d'indépendance linéaire de β^j, $j \in \omega$.

Definition 6.6. Un pseudo-programme x^0 est *strictement réalisable* si $\beta^j \succ 0$, $j \in \omega$.

On note qu'un pseudo-programme non dégénéré est strictement réalisable du moment que $\Delta_j = \beta_{0j} > 0$, $j \in \omega$.

Théorème 6.5. *Si* x^0 *est un pseudo-programme strictement réalisable et on choisit l'indice k par la règle* 2^{*l}, *alors* x^1 *est un pseudo-programme strictement réalisable.*

Démonstration. Comme la règle 2^{*l} renforce la règle 2*, x^1 est un pseudo-programme (th. 6.3). Il nous reste à démontrer $\overline{\beta}^j \succ 0$,

$j \in \omega^1$. Il est immédiat de vérifier par (6.29) que $\bar{\beta}^k \succ 0$ (car $\beta_{sk} < 0$). La formule (6.30) donne $\bar{\beta}^j \succ 0$ pour j tels que $\beta_{sj} \geqslant 0$ (car $-\frac{\beta_{sj}}{\beta_{sk}} \geqslant 0$). Si $\beta_{sj} < 0$, l'inégalité

$$\beta^j \succ \frac{\beta_{sj}}{\beta_{sk}} \beta^k$$

équivaut à

$$\frac{1}{\beta_{sj}} \beta^j \prec \frac{1}{\beta_{sk}} \beta^k,$$

inégalité vérifiée vu le choix de k.

THEOREME 6.6. *Si x^0 est un pseudo-programme strictement réalisable et l'indice k est choisi conformément à la règle 2^{*l}, alors*

$$c(x^1) \prec c(x^0).$$

DEMONSTRATION. La règle 1* présidant au choix de s fait que $x_s^0 < 0$ et $\beta_{sk} < 0$, si bien que $x_s^0/\beta_{sk} > 0$. On tire de (6.30) compte tenu de $\beta^k \succ 0$: $c(x^1) \prec c(x^0)$.

Avec les théorèmes démontrés, on peut dire que si l'on applique la méthode duale du simplexe et le tableau lexicographique et si l'on observe les règles 1* et 2^{*l} tout en prenant pour pseudo-programme initial un pseudo-programme strictement réalisable x^0, alors on évite le cyclage.

Pour les procédés de recherche d'un pseudo-programme initial strictement réalisable, voir § 5.

§ 5. Recherche d'un pseudo-programme initial

Le problème annoncé par le titre du paragraphe est en général plus compliqué que la recherche d'un programme de base. On n'a qu'à voir les conditions imposées au pseudo-programme x^0: $Ax^0 = b$, $A'p^0 \geqslant c$, avec $p^0 = (A'_\sigma)^{-1}c_\sigma$ (on rappelle que la matrice A_σ a pour colonnes les vecteurs de la base relative au pseudo-programme x^0, $c_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$). Aussi il paraît souvent opportun de remplacer (6.1) par un problème dont le pseudo-programme est obtenu de façon directe. Faisons au préalable une hypothèse supplémentaire sur les propriétés de (6.1), à savoir, on suppose que l'ensemble X^0 des solutions est borné. (L'exposé s'en trouvera allégé. D'autre part, l'intérêt majeur des résultats de ce chapitre est à nos yeux leur utilisation en programmation en nombres entiers qui implique nécessairement l'hypothèse en question.)

On applique le pivotage de Gauss-Jordan et on construit pour (6.1) le tableau simplicial $\mathfrak{B}$ sous forme lexicographique, ce qui donne en même temps un vecteur de base x^0.

Soit $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $\omega = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}\}$ les ensembles des indices des variables de base et des variables hors base de $\mathfrak{B}$ respectivement.

Si x^0 est un pseudo-programme strictement réalisable, le procédé s'arrête. Dans le cas contraire, le tableau $\mathfrak{B}$ contient au moins un vecteur β^j, $j \in \omega$, tel que $\beta^j \prec 0$.

On adjoint à (6.1) la variable supplémentaire x_{n+1} et une nouvelle contrainte, il vient le problème

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax = b, \quad \sum_{j\in\omega} x_j + x_{n+1} = M, \tag{6.31}$$
$$x \geqslant 0, \quad x_{n+1} \geqslant 0.$$

Ici M est un nombre suffisamment grand pour que toute solution $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in X^0$ du problème (6.1) vérifie

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \leqslant M. \tag{6.32}$$

On parlera plus loin de la façon dont on choisit M.

On constate sans peine que sous la condition (6.32) il y a une relation étroite entre les ensembles des solutions de (6.31) et (6.1). En effet, si $x^* \in X^0$, alors on pose $x_{n+1}^* = M - \sum_{j\in\omega} x_j^* \geqslant 0$ et on trouve évidemment la solution (x^*, x_{n+1}^*) de (6.31). Inversement, il correspond à toute solution $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ de (6.31) une solution $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ de (6.1).

Le tableau simplicial lexicographique $\mathfrak{B}$ du problème (6.1) correspond à un système réduit

$$x_0 = \alpha_{00} - \sum_{j\in\omega} \alpha_{0j} x_j,$$
$$x_i = \alpha_{i0} - \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij} x_j, \quad i \in \sigma,$$

où $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$,

$$x_i^0 = \begin{cases} \alpha_{i0}, & i \in \sigma, \\ 0, & i \notin \sigma, \end{cases}$$

est un vecteur de base du système d'équations $Ax = b$ de base $\{a^i, i \in \sigma\}$. Il est clair que (x^0, x_{n+1}^0), avec $x_{n+1}^0 = M - \sum_{j\in\omega} x_j^0$, est un vecteur de base de (6.31).

Si l'on désigne par β^j, $j \in \omega$, $j = 0$, les vecteurs-colonnes du tableau $\mathfrak{B}$ correspondant à l'ensemble σ des variables de base du problème (6.1), alors les colonnes du tableau simplicial $\mathfrak{B}_M$ relatif à

l'ensemble $\{\sigma, n+1\}$ des variables de base de (6.31) sont formées de vecteurs

$$\left\{\begin{pmatrix}\beta^j\\1\end{pmatrix},\ j\in\omega,\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \tag{6.33}$$

0 étant le vecteur nul de $\mathbf{R}^{n+1}$.

On construit le nouveau vecteur de base du problème (6.31). A cet effet, on appelle variable hors base la variable x_{n+1}, auquel cas il faut certes appeler variable de base une x_k des x_j, $j \in \omega$.

On choisit $k \in \omega$ de façon que tous les $j \in \omega$ satisfont à

$$\begin{pmatrix}\beta^k\\1\end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix}\beta^j\\1\end{pmatrix},$$

i.e. le vecteur $\begin{pmatrix}\beta^k\\1\end{pmatrix}$ est lexicographiquement le plus petit des vecteurs-colonnes de $\mathfrak{B}_M$. Le vecteur de base x^0 n'étant pas strictement réalisable, on a

$$\beta^k \prec 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}\beta^k\\1\end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

On transforme le tableau $\mathfrak{B}_M$ par les formules (6.28) et (6.29) (pour $j \in \omega$, $j = 0$), il vient le tableau lexicographique $\overline{\mathfrak{B}}_M$ qui correspond à un vecteur de base $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n+1}^1)$ du problème (6.31), où $x_j^1 = 0$ pour chaque $j \in \omega$, $j \neq k$, $x_{n+1}^1 = 0$.

Il est connu que $\beta_{n+1,\,j} = 1$ quel que soit $j \in \omega$. Aussi les colonnes $\bar{\beta}^j$, $j \in \omega$, $j \neq k$, $j = n+1$, du tableau $\overline{\mathfrak{B}}_M$ respectent d'après (6.28), (6.29) les conditions

$$\bar{\beta}^s \succ 0,\ \bar{\beta}^j \succ 0,\ j \in \omega,\ j \neq k.$$

Il s'ensuit que le vecteur $(x^1, 0)$ est un pseudo-programme strictement réalisable du problème (6.31).

On applique la méthode duale sous forme lexicographique et on trouve une solution (x^*, x_{n+1}^*) de (6.31). Cela étant, le vecteur x^* est, on l'a déjà dit, une solution de (6.1).

On passe au problème de choisir M de (6.31). Nombreux sont les cas où on l'indique facilement. Si l'on suppose, par exemple, que A possède une ligne a_i d'éléments positifs, $a_{ij} > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, cela signifie que l'ensemble X des programmes de (6.1) est borné, et on prend comme M le nombre $b_i/\min\limits_j a_{ij}$.

Supposons de même que le vecteur $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ définissant la fonction économique du problème (6.1) est positif, $c_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, et qu'on dispose d'un majorant $\tilde{d}$ de la valeur de (6.1) (on connaît, par exemple, un programme p du dual et $\tilde{d} =$

$= \langle p, b \rangle$). Dans ce cas, toute solution x^* de (6.1) vérifie la condition $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leqslant \tilde{d}$. On prend donc pour M le nombre $M = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\tilde{d}}{c_j}$.

Dans le cas où l'on ne trouve pas M de façon directe et où l'on demande un pseudo-programme strictement réalisable d'un problème (6.31) (par exemple, pour résoudre un problème lexicographique, voir § 6), on considère le problème

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0$$

et on utilise la méthode du simplexe. Sa valeur peut être acceptée en qualité de M.

§ 6. Problème lexicographique de la programmation linéaire

Dans ce paragraphe, on utilise la notation $c(x) = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où $x_0 = \langle c, x \rangle$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Soit X l'ensemble des programmes du problème (6.1), i.e.

$$X = \{x \mid x \in \mathrm{R}^n, Ax = b, x \geqslant 0\}.$$

On demande de trouver un vecteur $x^* \in X$ tel que

$$c(x^*) \succ c(x) \tag{6.34}$$

pour tous les $x \in X$, $x \neq x^*$.

Le problème (6.34) est dit *lexicographique* (ou l-problème).

Il est clair que si x^* est une solution de (6.34), il est encore celle du problème (6.1) parce que la relation $c(x^*) \succ c(x)$ signifie, en particulier, $\langle c, x^* \rangle \geqslant \langle c, x \rangle$.

Le problème (6.34) s'énonce donc en termes suivants: parmi toutes les solutions de (6.1), trouver celle qui est lexicographiquement maximale.

Prenons un exemple simple pour illustrer cet énoncé. Soit le problème

$$\max (x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_3 = 2, \; x_2 + x_4 = 2, \; x_1 + x_2 + x_5 = 3,$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = \overline{1, 5}.$$

Il s'agit d'un problème sous forme canonique qu'on ramène à la forme standard :

$$\max (x_1 + x_2)$$

$$x_1 \leqslant 2,\ x_2 \leqslant 2,\ x_1 + x_2 \leqslant 3,$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$

dont l'ensemble des solutions réalisables est représenté sur la fig. 6.1.

L'ensemble X^0 des solutions du problème est le segment d'extrémités (1, 2) et (2, 1), i.e. toute solution est un point arbitraire de la forme $(\alpha + 1, 2 - \alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

L'ensemble homologue du problème canonique initial est dans ce cas constitué de vecteurs $(\alpha + 1, 2 - \alpha, 1 - \alpha, \alpha, 0)$ dont le vecteur lexicographiquement maximal est obtenu pour $\alpha = 1$, i.e. c'est (2, 1, 0, 1, 0).

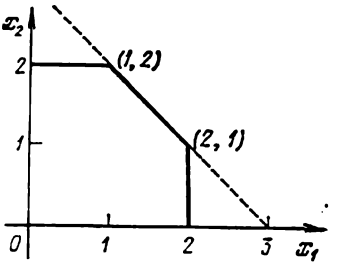


Fig. 6.1.

L'exemple ci-dessous montre que la possibilité de (6.1) n'entraîne pas automatiquement celle du problème (6.34). Soit le programme linéaire

$$\max (x_1 - x_2)$$

$$x_1 - x_2 = 0,\ x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

L'ensemble des solutions est formé de tous les vecteurs (x, x), $x \geqslant 0$. D'autre part, le l-problème correspondant n'admet évidemment pas de solution (l'ensemble $X^0 = \{(x, x),\ x \geqslant 0\}$ ne renferme pas de vecteur lexicographiquement maximal).

Voici certaines propriétés du problème lexicographique de la programmation linéaire.

THÉORÈME 6.7. *La solution du problème* (6.34), *s'il en existe, est unique.*

DÉMONSTRATION. Soit x^* et $\bar{x}$ deux solutions distinctes. On a alors $x^* \succ \bar{x}$ et $\bar{x} \succ x^*$ à la fois, ce qui contredit la définition de l'ordre lexicographique.

THÉORÈME 6.8. *Si x^* est la solution du problème* (6.34) *alors x^* est un point extrême de l'ensemble polyédrique X.*

DÉMONSTRATION. Soit $x^* = \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2$, avec $x^1, x^2 \in X$, et $x^1 \neq x^2 \neq x^*$. On fait l'hypothèse « $c(x^1) \succ c(x^2)$ », auquel cas $c(x^*) = \frac{1}{2} c(x^1) + \frac{1}{2} c(x^2) \prec \frac{1}{2} c(x^1) + \frac{1}{2} c(x^1) = c(x^1)$: contradiction avec la définition de x^* en tant que solution du problème (6.34).

THÉORÈME 6.9. *Le problème* (6.34) *est possible si et seulement si l'ensemble* X^0 *des solutions du problème* (6.1) *est non vide et borné.*

DÉMONSTRATION. Soit X^0 un ensemble borné, si bien que c'est un polyèdre convexe. Les théorèmes 2.11 et 2.12 entraînent que chaque point $x \in X^0$ est une combinaison linéaire convexe de l'ensemble $x^1, x^2, \ldots, x^k$ de tous les points extrêmes de X^0:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i, \text{ où } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geqslant 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. Le nombre k de points extrêmes de X^0 étant fini (th. 2.19), il y a un point extrême x^* tel que $c(x^*) \succ c(x^i)$, $x^i \neq x^*$, $1 \leqslant i \leqslant k$. On montre que x^* est la solution du problème (6.34). En effet, si $x \in X^0$ est un point quelconque, alors

$$c(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c(x^i) \prec \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c(x^*) = c(x^*).$$

On démontre l'affirmation dans l'autre sens. On suppose que le problème (6.34) possède la solution x^* et que l'ensemble X^0 n'est pas borné. Dans ce cas,

$$X^0 = M^{X^0} + K^{X^0},$$

où

$$K^{X^0} = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \ Ay = b, \ y \geqslant 0, \ \langle c, y \rangle = 0\}$$

(voir § 4, ch. III). La propriété de X^0 d'être non borné entraîne $K^{X^0} \neq 0$. Soit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^{X^0}$ un vecteur non nul quelconque et j le plus petit numéro tel que $y_j > 0$ (i.e. $y_i = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant j - 1$). Le vecteur $\bar{x} = x^* + y$ vérifie manifestement la condition $\bar{x} \succ x^*$ car $\bar{x}_i = x_i^*$ pour $0 \leqslant i \leqslant j - 1$ et $\bar{x}_j > x_j^*$. On conçoit en outre que $\bar{x} \in X^0$. La contradiction obtenue avec la définition de x^* démontre le théorème.

Le résultat suivant donne un moyen pour résoudre le l-problème.

THÉORÈME 6.10. *Un programme* x^* *du problème* (6.1) *est la solution du l-problème* (6.34) *si et seulement si* x^* *est un pseudo-programme strictement réalisable.*

On démontre ce résultat important en recourant au

LEMME 6.1. *Soit* x *un programme quelconque du problème* (6.1) *et* x^0 *son pseudo-programme strictement réalisable. On a* $c(x) \prec c(x^0)$.

DÉMONSTRATION. On montre aisément qu'un pseudo-programme x quelconque vérifie l'inégalité $\langle c, x^0 \rangle \geqslant \langle c, x \rangle$. Si $\langle c, x^0 \rangle > \langle c, x \rangle$, alors $c(x^0) \succ c(x)$ par définition de l'ordre lexicographique. Soit $\langle c, x^0 \rangle = \langle c, x \rangle$, auquel cas le vecteur $z = c(x^0) - c(x)$ appartient

au sous-espace L défini par le système d'équations (6.17), (6.18), (i.e. $Az = 0$).

Prenons la matrice D, tableau simplicial sous forme lexicographique (privé de la première colonne) relatif au pseudo-programme x^0. Selon (6.21), $z = -Dz_\omega$ ou $c(x^0) - c(x) = -D[c(x^0) - c(x)]_\omega$. On note que

$$[c(x^0) - c(x)]_\omega = c(x^0)_\omega - c(x)_\omega = -x_\omega$$

(car $c(x^0)_\omega = 0$). Ainsi, $c(x^0) - c(x) = Dx_\omega$. Le vecteur Dx_ω est une combinaison linéaire non négative (vu que $x \geqslant 0$) de colonnes de D:

$$Dx_\omega = \sum_{j \in \omega} x_j \beta^j.$$

Le pseudo-programme x^0 étant strictement réalisable, on a $\beta^j \succ 0$, $j \in \omega$, d'où $Dx_\omega \succ 0$ (il se peut que $Dx_\omega = 0$ si $x_\omega = 0$). Il en résulte $c(x^0) \succ c(x)$ pour $x \neq x^0$.

Démonstration du théorème 6.10. Si x^* est un pseudo-programme strictement réalisable qui est en même temps un programme du problème (6.1) (i.e. $x^* \geqslant 0$), alors le lemme démontré implique que x^* est la solution du l-problème (6.34).

Inversement, si x^* est la solution de (6.34), l'ensemble X^0 des solutions du problème (6.1) est borné (th. 6.9). On associe à ce dernier le problème (6.31) en supposant que tous les x de X^0 respectent la condition (6.32). D'après le théorème 6.8, x^* est un point extrême de X^0, i.e. x^* est un vecteur de base. Comme x^* est en même temps une solution de (6.1), c'est un pseudo-programme (th. 6.1). On fait l'hypothèse de x^* un pseudo-programme non strictement réalisable.

Le vecteur (x^*, x^*_{n+1}), avec $x^*_{n+1} = M - \sum_{j \in \omega} x^*_j$, jouit des propriétés suivantes: vu sa non-négativité, c'est un programme du problème (6.31); il est un pseudo-programme de (6.31) du moment que x^* en est un du problème (6.1); il n'est pas un pseudo-programme strictement réalisable avec x^*.

On applique à ce vecteur le procédé décrit au paragraphe précédent, il vient un pseudo-programme strictement réalisable $(\bar{x}, \bar{x}_{n+1})$ de (6.31). On l'accepte comme pseudo-programme de départ et on aborde ce problème par la méthode duale sous forme lexicographique et la règle 2^{*l}. On obtient par le théorème 6.5 un programme $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1})$ de (6.31) qui est en même temps un pseudo-programme strictement réalisable. Avec le lemme 6.1, on a $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1}) \succ (x^*, x_{n+1})$, d'où $\hat{x} \succcurlyeq x^*$. Par hypothèse, $x^* \succcurlyeq \hat{x}$, d'où $x^* = \hat{x}$. Dans ce cas,

$$\hat{x}_{n+1} = M - \sum_{j \in \omega} \hat{x}_j = M - \sum_{j \in \omega} x^*_j = x^*_{n+1}.$$

Ainsi, $(x^*, x^*_{n+1}) = (\hat{x}, \hat{x}_{n+1})$: contradiction (l'un est strictement réalisable et l'autre ne l'est pas).

CONSÉQUENCE. *Si le problème* (6.1) *admet un pseudo-programme strictement réalisable, alors l'ensemble* X^0 *de ses solutions est borné.*

En effet, soit x^0 un pseudo-programme strictement réalisable. On applique la méthode duale sous forme lexicographique en prenant x^0 pour pseudo-programme initial, il vient la solution du l-problème (6.34) (th. 6.5 et 6.10). Le caractère borné de X^0 découle du théorème 6.9.

CHAPITRE VII

PROBLÈMES PARTICULIERS DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

Nous avons décrit dans le chapitre V une méthode pour les programmes linéaires de forme générale. Bien que la méthode simpliciale soit finie, ses itérations peuvent être très nombreuses. D'autre part, on rencontre en programmation linéaire des classes de problèmes pratiques très répandus qui présentent des particularités (une structure singulière de la matrice A des contraintes). Ces particularités aidant, on simplifie sensiblement dans chaque cas concret le procédé de résolution, et le programme optimal est obtenu plus vite. Dans d'autres cas, on élabore une méthode spéciale à une classe déterminée de problèmes.

Le problème de transport familier au lecteur dès le chapitre premier est justement un exemple de problème à matrice des contraintes de structure particulière.

On rencontre également de nombreux problèmes ayant un intérêt d'application dont l'énoncé mathématique fournit un programme linéaire muni de contraintes supplémentaires. On demande, par exemple, que toutes les variables soient à valeurs entières. Cette restriction dépasse visiblement le cadre de la théorie ordinaire de la programmation linéaire, mais il arrive qu'avec les procédés de programmation linéaire, la résolution de ces problèmes se trouve notablement facilitée.

§ 1. Problème de transport et réseaux de transport

Le modèle mathématique du problème de transport s'écrit (voir (1.5), (1.6))

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \tag{7.1}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

On a vu (ch. premier) que le problème a un sens si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = D = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

i.e. la demande du bien transporté est égale à la disponibilité. Il est également clair que le problème est possible dès qu'il a un sens. Cela découle de la propriété de borne de l'ensemble X des programmes réalisables. En effet, on a évidemment $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \min(a_i, b_j)$ pour tout i et tout j. Si l'on range les variables x_{ij} dans l'ordre

$$x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{1n},\ x_{21},\ x_{22},\ \ldots,\ x_{2n},\ \ldots,\ x_{m1},\ x_{m2},\ \ldots,\ x_{mn},$$

la matrice des contraintes s'écrit

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & & \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} 1\ 1\ \ldots\ 1 & 0\ 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 0\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ \ldots\ 0 & 1\ 1\ \ldots\ 1 & \ldots & 0\ 0\ \ldots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 1\ 1\ \ldots\ 1 \\ 1\ 0\ \ldots\ 0 & 1\ 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 1\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 1\ \ldots\ 0 & 0\ 1\ \ldots\ 0 & \ldots & 0\ 1\ \ldots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ 0\ \ldots\ 1 & 0\ 0\ \ldots\ 1 & \ldots & 0\ 0\ \ldots\ 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array} \end{array}$$

On établit facilement que A est de rang $m+n-1$. En effet, la matrice a $m+n$ lignes qui sont toutes linéairement dépendantes. Il suffit, pour avoir cette propriété, d'additionner m premières lignes et d'en retrancher la somme des n dernières, ce qui donne le vecteur nul. D'autre part, on constate sans peine que $m+n-1$ lignes quelconques de A sont linéairement indépendantes.

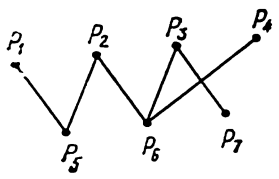


Fig. 7.1.

De nombreuses propriétés des programmes des problèmes de transport relèvent de l'Analyse combinatoire. Ce paragraphe a pour but d'énoncer et d'étudier ces propriétés abstraites.

Définition 7.1. Soit $P=\{P_1, P_2, \ldots, P_l\}$ un ensemble fini de points P_i et $\mathcal{T}$ un ensemble de couples (P_i, P_j) non ordonnés, dont chaque élément (le couple) s'appelle *arc*. On dit que l'ensemble $(P, \mathcal{T})$ constitue un *réseau de transport* et que l'arc (P_i, P_j) *relie* les points P_i et P_j qui sont les *extrémités* de l'arc (P_i, P_j).

Le nom « réseau de transport » provient de l'interprétation qu'on lui donne dans le problème de transport. Ces objets sont d'ordinaire appelés graphes non orientés. On voit sur la fig. 7.1 un ensemble P de sept points et un ensemble $\mathcal{T}$ de six arcs

$$(P_1, P_5),\ (P_2, P_5),\ (P_2, P_6),\ (P_3, P_6),\ (P_3, P_7),\ (P_4, P_6).$$

DÉFINITION 7.2. Un *chemin* est une suite finie arbitraire $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots$ $\ldots P_{i_k}$, où $P_{i_r} \in P$, $r = 0, 1, \ldots, k$, telle que tout couple $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})$, $r = 0, 1, \ldots, k-1$, soit un arc (i.e. $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}}) \in \mathcal{T}$) et que les arcs utilisés soient tous différents. En d'autres termes, un chemin est une ligne brisée continue formée d'arcs de $\mathcal{T}$, chaque arc étant utilisé une seule fois.

Les chemins de la fig. 7.1 sont, par exemple, $P_1P_5P_2P_6P_4$ et $P_7P_3P_6P_2$.

DÉFINITION 7.3. Un chemin $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_k}P_{i_0}$ est un *cycle*. Autrement dit, un cycle est un chemin dont le point initial coïncide avec le point terminal.

On ne voit aucun cycle sur la fig. 7.1, mais si l'on relie les points P_4 et P_7, on a le cycle $P_3P_7P_4P_6P_3$.

DÉFINITION 7.4. Un réseau de transport $(P, \mathcal{T})$ est dit *connexe* si pour tout P_1 et P_2, $P_1 \neq P_2$, il existe un chemin allant de P_1 vers P_2.

Les notions de cycle et de réseau de transport connexe sont le pivot des méthodes spéciales au problème de transport.

LEMME 7.1. *Si chaque point P_i est l'extrémité d'au moins deux arcs, le réseau de transport possède un cycle.*

DÉMONSTRATION. Prenons un chemin de longueur maximale sans cycle $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_{k-1}}P_{i_k}$. Le point P_{i_k}, extrémité de l'arc $(P_{i_{k-1}}, P_{i_k})$, l'est par hypothèse d'au moins un autre arc, disons (P_{i_k}, P_{i_r}). D'autre part, le chemin est maximal, si bien qu'il est impossible de lui adjoindre (P_{i_k}, P_{i_r}). Cela signifie que le chemin a déjà utilisé le point P_{i_r}:

$$P_{i_0}P_{i_1}\ \ldots\ P_{i_r}\ \ldots\ P_{i_{k-1}}P_{i_k}.$$

Alors $P_{i_r}\ldots P_{i_{k-1}}P_{i_k}P_{i_r}$ est un cycle.

LEMME 7.2. *Si le réseau de transport $(P, \mathcal{T})$ est connexe et si chaque point P_i est l'extrémité de deux arcs exactement, alors ce réseau est un cycle.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme précédent, le réseau de transport $(P, \mathcal{T})$ possède le cycle $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_k}P_{i_0}$. Comme chaque point P_{i_r}, $r = 0, 1, \ldots, k$, n'a que deux arcs incidents, tout chemin de point initial P_{i_r}, élément du cycle, se termine en un autre élément du cycle. Si l'on suppose que tous les points n'entrent pas dans celui-ci, i.e. on trouve $P_i \in P$ tel que $P_i \neq P_{i_r}$, $r = 0, 1, \ldots, k$, alors le chemin ne passe pas, par exemple, par P_{i_0} et P_i à la fois, ce qui contredit la propriété de connexité de $(P, \mathcal{T})$.

LEMME 7.3. *Si le point P_{i_0} est sur le même chemin que P_{i_r} et P_{i_r} est relié par un chemin au point P_{j_0}, $i_0 \neq j_0$, alors il existe un chemin allant de P_{i_0} à P_{j_0}.*

DÉMONSTRATION. Supposons que les suites
(1) $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2} \ldots P_{i_{r-1}}P_{i_r}$,
(2) $P_{j_0}P_{j_1}P_{j_2} \ldots P_{j_q}P_{i_r}$
sont des chemins. Il existe un numéro minimal t tel que P_{i_t} soit un point de (2). On cherche un numéro minimal s pour lequel $j_s = i_t$. Considérons les portions suivantes des chemins (1) et (2): $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2} \ldots P_{i_t}$ et $P_{j_0}P_{j_1}P_{j_2} \ldots P_{j_{s-1}}P_{j_s}$. Conformément au choix de t et s, on a $P_{i_t} = P_{j_s}$, et tous les autres points intermédiaires des chemins sont distincts. Dans ce cas, la suite $P_{i_0}P_{i_1} \ldots \ldots P_{i_t}P_{j_{s-1}} \ldots P_{j_1}P_{j_0}$ est le chemin cherché.

On visualise la démonstration par la fig. 7.2.

LEMME 7.4. *Si le réseau de transport est sans cycles, tout chemin est défini de façon unique par la donnée des points terminaux.*

DÉMONSTRATION. On admet que l'affirmation est fausse et qu'il existe deux chemins différents $P_{i_0}P_{i_1} \ldots P_{i_{r-1}}P_{i_r}$ et $P_{i_0}P_{j_1} \ldots \ldots P_{j_q}P_{i_r}$. Soit t un indice tel que $P_{i_s} = P_{j_s}$ pour $s \leqslant t$ et $P_{i_{t+1}} \neq P_{j_{t+1}}$ et h un indice tel que $P_{i_s} \neq P_{j_s}$ pour $t < s < h$ et $P_{i_h} = P_{j_h}$. Les chemins ont les mêmes extrémités, si bien que ces indices existent nécessairement. La suite $P_{i_t}P_{i_{t+1}} \ldots P_{i_h}P_{j_{h-1}} \ldots \ldots P_{j_t}$ est un chemin car le couple $(P_{i_h}, P_{j_{h-1}}) = (P_{j_h}, P_{j_{h-1}})$ est un arc. Comme $P_{i_t} = P_{j_t}$ dans ce cas, ce chemin est un cycle, ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

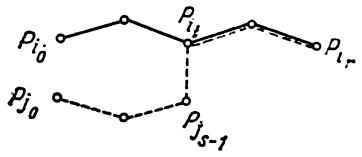


Fig. 7.2.

La fig. 7.3 sert à illustrer la démonstration que nous venons de terminer.

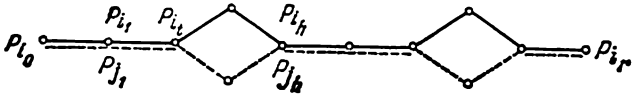


Fig. 7.3.

LEMME 7.5. *Soit l le nombre d'éléments (points) de l'ensemble P. Si l'ensemble $\mathcal{T}$ contient moins de $l - 1$ arcs, alors le réseau de transport $(P, \mathcal{T})$ n'est pas connexe.*

DÉMONSTRATION. On agit par récurrence. Si $l = 2$ et $\mathcal{T}$ renferme moins de $l - 1$ arcs (i.e. il n'a pas d'arcs), alors on a le résultat voulu.

On suppose l'affirmation juste pour les réseaux de transports à l points. Prenons un réseau défini par $P = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_l\}$ et $\mathcal{T}$ contenant moins de l arcs. Le réseau $(P, \mathcal{T})$ possède un point ayant un seul arc incident. En effet, s'il n'en est pas ainsi, alors le nombre

d'arcs doit être au moins égal à $l + 1$ (nombre de points). On suppose que P_0 est relié à P_1 seul. Soit le réseau $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{T}})$, $\tilde{P} = \{P_1, \ldots, P_l\}$, $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \setminus (P_0, P_1)$. Le couple $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{T}})$ vérifie l'hypothèse de récurrence; il existe deux points P_i et P_j, $i \neq 0$, $j \neq 0$, impossibles à relier par un chemin. Il est clair qu'il en est de même de ces points éléments du réseau $(P, \mathcal{T})$.

On note qu'un réseau de transport contenant exactement $l - 1$ arcs peut être connexe (voir fig. 7.1).

LEMME 7.6. *Si le réseau de transport $(P, \mathcal{T})$ est connexe sans cycles, alors l'ensemble $\mathcal{T}$ a exactement $l - 1$ arcs, l étant le nombre de points de P.*

DÉMONSTRATION. On procède toujours par récurrence. L'affirmation est triviale pour $l = 2$. On la suppose vraie pour les points en nombre l et on prend le réseau où $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_l\}$. Le réseau de transport $(P, \mathcal{T})$ étant dépourvu de cycles, il existe par le lemme 7.1 un point (disons, P_0) qui est l'extrémité de l'arc (P_0, P_1) seul (cet arc existe nécessairement, vu la connexité du réseau). On imite la démonstration du lemme précédent et on considère le réseau de transport $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{T}})$, où $\tilde{P} = \{P_1, \ldots, P_l\}$ et $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \setminus (P_0, P_1)$. Le couple $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{T}})$ remplit évidemment les conditions du lemme du moment qu'il en est ainsi du réseau $(P, \mathcal{T})$. L'ensemble $\tilde{\mathcal{T}}$ renferme, par hypothèse de récurrence, $l - 1$ arcs exactement. Par conséquent, le nombre d'éléments de $\mathcal{T}$ est l, ce qui est inférieur d'une unité au nombre de points de P.

Les lemmes 7.5 et 7.6 entraînent la

CONSÉQUENCE. *Si le réseau de transport $(P, \mathcal{T})$ est connexe et l'ensemble $\mathcal{T}$ contient l arcs, l étant le nombre de points de P, alors $(P, \mathcal{T})$ possède exactement un cycle.*

En effet, le réseau $(P, \mathcal{T})$ doit contenir des cycles par le lemme 7.6. Supposons qu'ils sont deux. Le fait d'éliminer un arc quelconque d'un cycle laisse évidemment invariable la propriété de connexité. Si l'on supprime dans chaque cycle un seul arc de façon que ces arcs soient différents, on obtient donc un réseau de transport connexe à $l - 2$ arcs: contradiction avec le lemme 7.5.

§ 2. Recherche d'un programme de base initial du problème de transport par la méthode du coin nord-ouest

Il est déjà connu que la matrice des contraintes du problème de transport est de rang $m + n - 1$ (§ 1). Etant donnés la définition d'un programme de base et le théorème 5.3, il existe un programme

optimal qui renferme au plus $m + n - 1$ quantités transportées positives x_{ij}. On pourrait certes trouver ce programme optimal par la méthode du simplexe, mais les particularités de la matrice A nous autorisent à utiliser un procédé différent qui réduit sensiblement le volume de calculs.

Recherche d'un programme de base initial (méthode du coin nord-ouest).

Si l'on pose $x_{ij} = a_i b_j / D$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, on trouve immédiatement un programme de transport réalisable. Mais il n'est pas de base. On construit le programme de base initial $\{x_{ij}^0\}$ en utilisant le schéma simple suivant.

Soit le tableau 7.1. Chaque case vide correspond à une variable

Tableau 7.1

				a_1
				a_2
				$\vdots$
				a_m
b_1	b_2	$\ldots$	b_n	

Tableau 7.2

a_1	0	$\ldots$	0	0
				a_2
				$\vdots$
				a_m
b_1-a_1	b_2	$\ldots$	b_n	

x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. La méthode du coin nord-ouest consiste à porter successivement dans les cases les valeurs x_{ij}^0. La dernière colonne du tableau contient les nombres a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, qui représentent la quantité disponible dans chaque origine, et les nombres de la dernière ligne sont les besoins de chaque destination.

Le tableau jouit de certaines propriétés évidentes:

1) la somme des éléments de la ligne i est égale à a_i:

2) la somme des éléments de la colonne j est égale à b_j;

3) la somme des éléments de la dernière colonne est égale à la somme des éléments de la dernière ligne.

La case du coin nord-ouest du tableau correspond à x_{11}. On pose $x_{11}^0 = \min\{a_1, b_1\}$. Si $x_{11}^0 = a_1$ (i.e. $a_1 \leqslant b_1$), cela signifie que tous les biens disponibles sont transportés de la première origine vers la première destination. On pose donc $x_{1j}^0 = 0$ pour $j = 2, \ldots, n$. On porte dans le tableau 7.2 les valeurs x_{ij} obtenues.

Les éléments de la dernière colonne et de la dernière ligne sont modifiés en fonction de la quantité transportée x_{ij}^0 ; la disponibilité de la première origine est saturée, et la demande supplémentaire de la première destination est $b_1 - a_1$.

Si $x_{11}^0 = b_1$ (i. e. $b_1 \leqslant a_1$), la demande au premier point de destination est satisfaite, si bien que $x_{i1}^0 = 0$ pour $i = 2, \ldots, m$ (voir tabl. 7.3).

Tableau 7.3

b_1				a_1-b_1
0				a_2
$\vdots$				$\vdots$
0				a_m
0	b_2	$\ldots$	b_n	

Tableau 7.4

a_1	0	0	$\ldots$	0	0
a_2	0	0	$\ldots$	0	0
					a_3
					$\vdots$
					a_m
$b_1-a_1-a_2$	b_2	b_3	$\ldots$	b_n	

On note que les propriétés 1) à 3) restent en vigueur pour les tableaux 7.2 et 7.3.

Tableau 7.5

a_1	0	0	$\ldots$	0	0
b_1-a_1					$a_2-b_1+a_1$
0					a_3
$\vdots$					$\vdots$
0					a_m
0	b_2	b_3	$\ldots$	b_n	

Tableau 7.6

b_1	a_1-b_1	0	$\ldots$	0	0
0					a_2
0					a_3
$\vdots$					$\vdots$
0					a_m
0	$b_2-a_1+b_1$	b_3	$\ldots$	b_n	

Après la première étape de la méthode du coin nord-ouest, on obtient dans les deux cas une sous-matrice rectangulaire des cases vides. On opère de même et on aboutit à l'un des tableaux 7.4 à 7.7.

Les propriétés 1) à 3) sont évidemment justes à chaque pas, et on obtient x_{ij}^0 non négatifs. Finalement, toutes les lignes et toutes

les colonnes se trouvent remplies. Quand la dernière ligne et la dernière colonne ne contiennent que 0, on peut dire que l'ensemble de nombres $\{x_{ij}^0\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, est un programme de transport.

Tableau 7.7

b_1	b_2				$a_1-b_1-b_2$
0	0				a_2
0	0				a_3
⋮	⋮				⋮
0	0				a_m
0	0	b_3	...	b_n	

Illustrons la méthode décrite par un exemple numérique. Récrire le tableau tout entier nous prendrait trop de place, si bien que nous nous bornerons à adjoindre la dernière ligne et la dernière colonne nouvellement formées. Soit $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 3$, $a_4 = 9$, $a_5 = 14$, $b_1 = 10$, $b_2 = 18$, $b_3 = 7$, $b_4 = 5$. On a nécessairement $\sum_{i=1}^{5} a_i = 40 = \sum_{j=1}^{4} b_j$. Les calculs sont condensés en tableau 7.8.

Tableau 7.8

6	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	0	0	8	8	4	0	0	0	0	0	0
0	3	0	0	3	3	3	3	0	0	0	0	0
0	9	0	0	9	9	9	9	9	0	0	0	0
0	2	7	5	14	14	14	14	14	14	12	5	0
10	18	7	5									
4	18	7	5									
0	18	7	5									
0	14	7	5									
0	11	7	5									
0	2	7	5									
0	0	7	5									
0	0	0	5									
0	0	0	0									

Le problème de déterminer si oui ou non le programme $\{x_{ij}^0\}$ construit par la méthode du coin nord-ouest est de base sera tranché dans le paragraphe suivant.

§ 3. Programmes de base du problème de transport et dégénérescence

Voyons les relations qui existent entre les programmes du problème de programmation linéaire (7.1) et les réseaux de transport introduits dans le § 1.

Soit $\{x_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, un programme du problème (7.1). On associe à $\{x_{ij}\}$ un réseau de transport $(P, \mathcal{T})$, avec $P = S \cup Q$, S étant l'ensemble des origines S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$; Q l'ensemble des destinations Q_j, $j = 1, 2, \ldots, n$; l'ensemble $\mathcal{T}$ est défini comme suit. Un arc (S_i, Q_j) appartient à $\mathcal{T}$ si et seulement si $x_{ij} > 0$. On suppose naturellement que les nombres a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, et b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, représentant la disponibilité et la demande en S_i et Q_j respectivement sont positifs, et les contraintes du problème de transport entraînent donc que chaque point du réseau correspondant à tout $\{x_{ij}\}$ a au moins un arc incident (un transport est nécessairement réalisé à partir de toute origine, et, inversement, toute destination reçoit une quantité de bien).

Le réseau ainsi construit a ceci de particulier que l'ensemble $\mathcal{T}$ ne possède pas d'arcs de la forme (S_i, S_j), (Q_i, Q_j). On en déduit aisément le résultat suivant (important pour la suite de l'exposé): tout cycle du réseau de transport $(S \cup Q, \mathcal{T})$ contient un nombre pair d'arcs.

Nous notons par convention a^{ij} la colonne de A qui correspond à la variable x_{ij}. Dans ce cas

$$a^{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ (m+j) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad a^{ij} \in \mathrm{R}^{m+n}$$

Les parenthèses sont le numéro de la coordonnée de valeur 1.

On désigne par $A(x)$ le système de vecteurs-colonnes de A qui correspondent aux coordonnées positives du programme

$$x = \{x_{ij}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Il y a entre $A(x)$ et le réseau de transport associé au programme x une relation facile à établir, à savoir $a^{ij} \in A(x)$ si et seulement si l'arc (S_i, Q_j) est élément du réseau.

On applique les résultats du § 1 aux programmes du problème (7.1).

THÉORÈME 7.1. *Un programme $\{x_{ij}\}$ du problème de transport* (7.1) *est un programme de base si et seulement si le réseau associé ne possède pas de cycles.*

DÉMONSTRATION. Aux termes de la définition 5.1, un programme $x = \{x_{ij}\}$ est de base si le système de vecteurs $A(x)$ est linéairement indépendant. On aura l'affirmation du théorème si l'on montre, en particulier, la dépendance linéaire du système $A(x)$ à condition que le réseau associé à x contienne le cycle

$$S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}Q_{j_2}\ldots S_{j_k}Q_{j_k}S_{i_1}.$$

En effet, la définition 7.3 d'un cycle implique que les vecteurs $a^{i_1j_1}$, $a^{i_2j_1}$, $a^{i_2j_2}$, ..., $a^{i_kj_k}$, $a^{i_1j_k}$ appartiennent à l'ensemble $A(x)$. D'autre part, on constate facilement à la lumière de la structure des colonnes de A que

$$a^{i_1j_1} - a^{i_2j_1} + a^{i_2j_2} - \ldots + a^{i_kj_k} - a^{i_1j_k} = 0.$$

Ainsi, il y a dépendance linéaire des vecteurs a^{ij} définissant le cycle donné, si bien qu'il en est de même du système $A(x)$ qui contient un sous-système lié. On démontre l'affirmation dans l'autre sens. On suppose le système $A(x)$ linéairement dépendant, i. e. il existe des nombres β_{ij} tels que

$$\sum \beta_{ij}a^{ij} = 0, \tag{7.2}$$

la sommation étant étendue à tous les couples (i, j) pour lesquels a^{ij} sont dans $A(x)$. Cela étant, les nombres β_{ij} ne sont pas tous nuls, par définition des vecteurs dépendants. On prend le réseau de transport $(S \cup Q, \mathcal{T})$ associé au programme x et le réseau $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$ défini comme suit : l'arc (S_i, Q_j) appartient à $\tilde{\mathcal{T}}$ si et seulement si $(S_i, Q_j) \in \mathcal{T}$ et $\beta_{ij} \neq 0$. Donc $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$. Etant donnée la structure des colonnes de A, on a nécessairement pour $\beta_{ij} \neq 0$ une colonne $a^{ip} \in A(x)$, $p \neq j$, telle que $\beta_{ip} \neq 0$; dans le cas contraire, la i-ième coordonnée du vecteur $\sum \beta_{ij}a^{ij}$ serait égale à $\beta_{ij} \neq 0$. Autrement dit, $\tilde{\mathcal{T}}$ possède un arc (S_i, Q_p), $p \neq j$.

On vient de démontrer que chaque point S_i donne lieu au moins à deux arcs. Si l'on prend les n dernières coordonnées des colonnes de A, on obtient la même propriété pour les points Q_j. Le lemme 7.1 entraîne l'existence d'un cycle dans le réseau $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$ et, partant, dans $(S \cup Q, \mathcal{T})$.

THEOREME 7.2. *Le programme* $x^0 = \{x_{ij}^0\}$ *construit par la règle du coin nord-ouest est un programme de base.*

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer que le réseau de transport associé à x^0 ne possède pas de cycles (th. 7.1). On procède par l'absurde et on suppose que le réseau a un cycle de la forme

$$S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}Q_{j_2} \ldots S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_1}.$$

On accepte i_1 comme le plus petit nombre du cycle, i.e. $i_1 < i_r$, $r = 2, 3, \ldots, k$. Dans le cas contraire, on aurait pris le cycle

$$S_{i_1}Q_{j_2} \ldots S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}.$$

Le fait que le réseau de transport relatif à x^0 possède les couples (S_{i_1}, Q_{j_1}), (S_{i_1}, Q_{j_k}) atteste la satisfaction de la demande en Q_{j_1} ou Q_{j_k} (cela découle du procédé de construction du programme x^0). Dans ce cas, le réseau ne peut posséder (S_{i_2}, Q_{j_1}), (S_{i_k}, Q_{j_k}) à la fois parce que la réalisation du transport depuis S_{i_2} et S_{i_k} par la méthode du coin nord-ouest n'a lieu qu'après la saturation de la disponibilité en S_{i_1}. Le théorème est démontré.

On note que le programme x^0 n'est pas nécessairement non dégénéré car il se peut qu'il possède moins de $m + n - 1$ composantes positives. Soit, par exemple, $a_1 = b_1$, i.e. la disponibilité en S_1 est égale à la demande en Q_1. On a par la règle du coin nord-ouest $x_{11}^0 = a_1$ et $x_{21}^0 = 0$ bien que Q_1 subsiste formellement en tant que consommateur et le vecteur a^{21} entre donc dans la base associée au programme x^0.

On rappelle qu'un problème de programmation linéaire est dit *dégénéré* s'il admet au moins un programme de base dégénéré. Il se trouve qu'on vérifie assez aisément si le problème de transport est ou n'est pas dégénéré.

THEOREME 7.3. *Le problème de transport* (7.1) *est dégénéré si et seulement si la disponibilité totale à quelques-unes* (*non toutes*) *origines est égale au déficit total à quelques-unes* (*non toutes*) *destinations*, i.e. *il existe des sous-ensembles propres* $G \subset M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $H \subset \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *tels que*

$$\sum_{i \in G} a_i = \sum_{j \in H} b_j. \tag{7.3}$$

DEMONSTRATION. On a $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, si bien que (7.3) a lieu avec

$$\sum_{i \in M \setminus G} a_i = \sum_{j \in N \setminus H} b_j. \tag{7.4}$$

Soit un problème de transport dont les fournisseurs sont S_i, $i \in G$, et les consommateurs Q_j, $j \in H$. On suppose que le nombre d'éléments de G et H est s et t respectivement. On utilise la méthode du coin nord-ouest et on forme un programme de base ayant au plus $s + t - 1$ composantes positives. On opère de même en ce qui concerne le second groupe de fournisseurs et de consommateurs, il vient un programme de base qui comporte au plus $(m - s) + (n - t) - 1$ quantités transportées. L'ensemble de toutes les

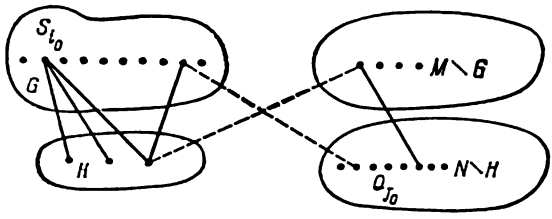


Fig. 7.4.

quantités transportées constitue un programme de base du problème de départ (7.1), qui a au plus $(m - s) + (n - t) - 1 + s + t - 1$ quantités transportées. Si l'égalité (7.3) a lieu, le problème (7.1) est donc dégénéré, c'est-à-dire il existe un programme ayant au plus $m + n - 2$ composantes positives tandis que la matrice des contraintes est de rang $m + n - 1$.

On démontre l'affirmation dans l'autre sens. Si le problème (7.1) admet un programme de base x dégénéré, alors les composantes positives de celui-ci sont moins de $m + n - 1$, auquel cas le réseau de transport associé n'est pas connexe (lemme 7.5). On trouve deux points, disons, S_{i_0} et Q_{j_0} impossibles à relier par un chemin. On note H l'ensemble des indices des points Q_j qui sont dans le même chemin que S_{i_0}. On note la non-vacuité de H (S_{i_0} est relié par un arc avec au moins un point Q_j). D'autre part, $H \neq N$ du moment que $j_0 \notin H$. On désigne par G l'ensemble des indices des points S_i dont chacun appartient au même chemin qu'au moins un point indicé par l'ensemble H. L'ensemble G est non vide car $i_0 \in G$. D'autre part, $G \neq M$. En effet, G contient dans le cas contraire un élément i tel que S_i soit relié avec Q_{j_0}. Dans ce cas, il existe par le lemme 7.3 un chemin contenant Q_{j_0} et S_{i_0} : contradiction avec le choix de Q_{j_0}. Il est évident qu'aucun point S_i, $i \in G$, ne peut faire partie du chemin qui utilise un point quelconque Q_j, $j \in N \setminus H$, et il n'existe pas de chemin qui va d'un point Q_j, $j \in H$, vers un point S_i, $i \in M \setminus G$.

Autrement dit, les arcs en traits ponctués de la fig. 7.4 sont inexistants : leur existence contredirait la définition de G et H. Cela

signifie que si $i \in G$ et $x_{ij} > 0$, alors $j \in H$. De même, $i \in G$ si $j \in H$ et $x_{ij} > 0$. Le système de contraintes du problème (7.1) entraîne donc

$$\sum_{j \in H} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in G,$$

$$\sum_{i \in G} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in H,$$

d'où

$$\sum_{i \in G} a_i = \sum_{i \in G} \sum_{j \in H} x_{ij} = \sum_{j \in H} b_j.$$

§ 4. Problème de transport et méthode des potentiels

La méthode annoncée par le titre de ce paragraphe est une variante simplifiée de la méthode simpliciale révisée (voir § 6, ch. V).

On se place dans le cas non dégénéré. On désigne par $-u_1, -u_2, \ldots, -u_m$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les variables duales (coûts) associées au premier et au second groupe de contraintes du problème (7.1) respectivement. Comme le problème de transport est un programme linéaire canonique, on n'astreint pas les variables duales à être non négatives, si bien que le signe moins devant u_i est vide de toute information, et on l'a introduit dans le seul but d'alléger l'exposé.

On construit le dual de (7.1):

$$\max \left(\sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i\right)$$
$$v_j - u_i \leqslant c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.5}$$

Selon la théorie de la dualité, un programme $\{x_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, du problème (7.1) est optimal s'il existe un programme (u_i, v_j), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, du dual (7.5) tel que l'égalité $v_j - u_i = c_{ij}$ ait lieu dès que $x_{ij} > 0$.

On résout (7.1) par la méthode révisée du simplexe.

Soit $x^0 = \{x_{ij}^0\}$ un programme de base initial. L'équation (5.41) entraîne $A'p^0 = c^0$ qui s'écrit en raison de la structure de la matrice A de (7.1):

$$v_j^0 - u_i^0 = c_{ij}, \tag{7.6}$$

le couple (i, j) parcourant tout l'ensemble des indices des colonnes de base a^{ij} du programme de base initial x^0.

A la différence du cas général (5.41), le système d'équations (7.6) est très simple, et sa résolution est immédiate. L'une des équations du système de contraintes du problème de transport est, on le sait, superflue, si bien qu'on pose $u_1^0 = 0$. Si le système (7.6) contient

l'équation $v^0_{j_0} - u^0_1 = c_{1j_0}$, on définit $v^0_{j_0} = c_{1j_0}$. Il suffit, pour calculer une autre variable, disons u_{j_0}, de construire le chemin

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} \ldots S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0}.$$

Ce chemin existe vu la connexité du réseau de transport associé au programme de base x^0 (le problème étant supposé non dégénéré). L'existence de ce chemin signifie que le système (7.6) contient les équations

$$v^0_{j_0} - u^0_{i_1} = c_{i_1 j_0}, \quad v^0_{j_1} - u^0_{i_1} = c_{i_1 j_1}, \; v^0_{j_1} - u^0_{i_2} = c_{i_2 j_1}, \ldots$$
$$\ldots, \; v^0_{j_k} - u^0_{i_k} =$$
$$= c_{i_k j_k}, \; v^0_{j_k} - u^0_{i_0} = c_{i_0 j_k}. \qquad (7.7)$$

La valeur $v^0_{j_0}$ étant connue, on détermine de proche en proche $u^0_{i_1}, v^0_{j_1}, \ldots, u^0_{i_0}$.

Les étapes 1 et 3 de la méthode révisée du simplexe se trouvent sensiblement simplifiées (on omet les calculs (5.27) à (5.29)). La formule (5.42) prend elle aussi un aspect plus simple:

$$\Delta^0_{ij} = v^0_j - u^0_i - c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.8)$$

Comme on demande de rendre minimum la fonction économique, le critère d'optimalité est « si $\Delta^0_{ij} \leqslant 0 \; \forall i, j$, alors le programme $\{x^0_{ij}\}$ est optimal; si $\Delta^0_{i_0 j_0} > 0$, $\{x^0_{ij}\}$ n'est pas optimal ». Le problème de transport présente la particularité de permettre la recherche du nouveau programme de base sans passer par les étapes 2 et 3 de la méthode révisée du simplexe qu'on remplace par des calculs plus économiques.

Soit le vecteur $a^{i_0 j_0}$. Conformément aux règles de la méthode simpliciale, il est à introduire dans la base. Autrement dit, on décide de réaliser un transport entre S_{i_0} et Q_{j_0}, i. e. on veut utiliser un nouvel arc (S_{i_0}, Q_{j_0}). Le système de vecteurs $A(x^0) \cup a^{i_0 j_0}$ étant linéairement dépendant, le réseau de transport obtenu par adjonction de l'arc (S_{i_0}, Q_{j_0}) au réseau associé au programme x^0 possède des cycles (th. 7.1). Comme le réseau primitif n'avait pas cette propriété, il y a un seul cycle par la conséquence des lemmes 7.5 et 7.6. Ce cycle contient évidemment un arc de la forme (S_{i_0}, Q_{j_0}), i. e. il s'écrit

$$S_{i_0} Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} \ldots S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0}. \qquad (7.9)$$

Il lui correspond la suite de variables

$$x_{i_0 j_0}, \; x_{i_1 j_0}, \; x_{i_1 j_1}, \; \ldots, \; x_{i_k j_k}, \; x_{i_0 j_k}. \qquad (7.10)$$

On pose

$$x^1_{i_0 j_0} = x^0_{i_0 j_0} + \theta = \theta. \qquad (7.11)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^1_{i_1 j_0} = x^0_{i_0 j_0} - \theta, \\ x^1_{i_1 j_1} = x^0_{i_1 j_1} + \theta, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^1_{i_k j_k} = x^0_{i_k j_k} + \theta, \\ x^1_{i_0 j_k} = x^0_{i_0 j_k} - \theta, \end{array}\right\} \tag{7.12}$$

$x^1_{ij} = x^0_{ij}$ pour (i, j) restants.

Le sens de la transformation (7.11), (7.12) est évident: nous voulons introduire dans le nouveau programme la quantité θ transportée de S_{i_0} en Q_{j_0}. Pour que la quantité totale arrivée à Q_{j_0} soit la même (b_{j_0}), il faut diminuer de θ la quantité livrée par S_{i_1} à Q_{j_0}. Pour cela, on doit augmenter de θ le volume de marchandises dirigées de S_{i_1} vers Q_{j_1} afin que la quantité livrée par S_{i_1} reste au total constante. S'agissant du dernier chaînon (S_{i_0}, Q_{j_k}) du chemin (7.9), l'équilibre perturbé par la diminution des livraisons de S_{i_0} est rétabli grâce à l'arc (S_{i_0}, Q_{j_0}) (on rappelle que chaque cycle de notre réseau de transport possède des arcs en nombre pair).

Il reste à vérifier que le vecteur $\{x^1_{ij}\}$ défini par (7.11), (7.12) est un programme de base. Premièrement, il faut que x^1_{ij} soit non négatif pour tout i et tout j. On y arrive en posant

$$\theta = \min_{0 \leqslant r \leqslant k} x^0_{i_{r+1} j_r}, \tag{7.13}$$

où $i_{k+1} = i_0$.

On montre qu'avec θ ainsi choisi, le programme $\{x^1_{ij}\}$ est de base. Si l'on admet que le système de vecteurs A (x^1) est linéairement dépendant, le réseau de transport associé au programme x^1 possède par le théorème 7.1 un cycle (7.9). Ce cycle est unique parce que tous les arcs de (7.9) à partir du deuxième appartiennent au réseau relatif au programme de base x^0, qui contient donc le seul chemin allant de Q_{j_0} vers Q_{j_k}.

Etant donnée l'unicité, le réseau diminué de tout arc $(S_{i_{r+1}}, Q_{j_r})$ n'a pas de cycle. Selon (7.12) et (7.13), au moins une des variables $x^1_{i_{r+1} j_r}$ est nulle, si bien que l'arc correspondant est absent du réseau associé au programme $\{x^1_{ij}\}$, ce qui donne le résultat cherché.

On vérifie maintenant que la valeur de la forme linéaire $\langle c, x\rangle$ diminue avec le passage au nouveau programme de base $x^1 = \{x^1_{ij}\}$. On note à ce propos que $a^{i_1 j_0}, a^{i_1 j_1}, \ldots, a^{i_k j_k}, a^{i_0 j_k}$ sont des vecteurs de base pour x^0, et on a donc les égalités (7.7) pour les variables duales correspondantes. Voyons une propriété des équations (7.7). Si l'on effectue la somme alternée de toutes les équations et si le premier signe en est « — », alors le premier membre est égal à $u^0_{i_0} - v^0_{j_0}$, et le second membre s'écrit conventionnellement $\sum (\pm c_{ij})$. Prenons les équations (7.12). Il correspond à chacune un même cou-

ple (i, j) qu'à l'équation homologue du système (7.7). On multiplie (7.11) par le coefficient correspondant c_{ij} de la forme linéaire et on fait la somme, il vient une égalité de la forme

$$\sum c_{ij}(x_{ij}^1 - x_{ij}^0) = \theta \sum (\pm c_{ij}),$$

où l'on retrouve à droite la somme alternée obtenue à partir de (7.7). On a $x_{i_0 j_0}^1 - x_{i_0 j_0}^0 = \theta$ et $x_{ij}^1 - x_{ij}^0 = 0$ pour tous les indices autres que ceux de (7.12), si bien que

$$\sum_i \sum_j c_{ij}(x_{ij}^1 - x_{ij}^0) = \theta c_{i_0 j_0} + \theta(u_{i_0}^0 - v_{j_0}^0) = \theta(-\Delta_{ij}^0) < 0.$$

Ici on utilise l'hypothèse de x^0 non dégénéré en estimant que $\theta > 0$.

Fort des raisonnements de ce paragraphe, nous décrivons les étapes de la méthode des potentiels pour le problème de transport.

On connaît un programme de base initial x^0.

Etape 1. Trouver les valeurs u_i^0, v_j^0, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, des variables duales par la formule (7.6).

Etape 2. Calculer Δ_{ij}^0, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, par la formule (7.8). Si tous les Δ_{ij}^0 sont non positifs, x^0 est un programme optimal. Dans le cas $\Delta_{i_0 j_0}^0 > 0$, passer à l'étape suivante.

Etape 3. Trouver un cycle (7.9) et calculer le nouveau programme de base x^1 à l'aide des formules (7.11) à (7.13).

Etape 4. Accepter x^1 comme programme de base initial et répéter l'itération à partir de l'étape 1.

Comme il résulte de sa description, la méthode des potentiels pour le problème de transport a pour partie constitutive importante la recherche du chemin reliant deux points donnés. Cette opération figure dans les étapes 1 et 3 et constitue à elle seule tous les calculs de la méthode simpliciale classique. Voyons un procédé de recherche du chemin en question.

Soit un réseau de transport connexe sans cycles défini par le couple $(S \cup Q, \mathcal{T})$. Etant donnés les points S_{i_0} et Q_{j_0}, on demande le chemin entre ces points. On essaie, en premier lieu, tous les arcs de l'ensemble $\mathcal{T}$. Si (S_{i_0}, Q_{j_0}) appartient à $\mathcal{T}$, il s'agit du chemin cherché. Si $(S_{i_0}, Q_{j_0}) \notin \mathcal{T}$, on adjoint cet arc au réseau $(S \cup Q, \mathcal{T})$, i. e. on a le réseau de transport $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$, où $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup (S_i, Q_{j_0})$.

Le réseau $(S \cup Q, \mathcal{T})$ contient le chemin allant de S_{i_0} vers Q_{j_0}. L'adjonction de l'arc (S_{i_0}, Q_{j_0}) fait que ce chemin n'est pas unique dans $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$, d'où l'on déduit par le lemme 7.4 l'existence d'un cycle dans le dernier réseau. Chaque cycle de $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$ est, on l'a dit dans ce paragraphe, de la forme (7.9). Si l'on définit ce cycle, alors

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} \ldots Q_{j_k} S_{i_0}$$

est le chemin cherché.

Ainsi, le problème de définir un chemin se ramène à la recherche d'un cycle (7.9). C'est également le problème majeur de l'étape 3 de la méthode des potentiels.

On procède comme suit pour trouver un cycle (7.9) du réseau de transport $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$.

On examine pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, les couples $(S_i, Q_j) \in \tilde{\mathcal{T}}$. S'il n'y en a pas ou s'il n'y en a qu'un seul, on élimine S_i du réseau $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$. On note $(S^{(1)} \cup Q, \tilde{\mathcal{T}}^{(1)})$ le réseau ainsi obtenu. On considère pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, les couples $(S_i, Q_j) \in \tilde{\mathcal{T}}^{(1)}$. Si on n'en trouve pas ou si on en trouve un seul, on élimine Q_j du réseau $(S^{(1)} \cup Q, \tilde{\mathcal{T}}^{(1)})$. Soit $(S^{(1)} \cup Q^{(1)}, \tilde{\mathcal{T}}^{(1)})$ le nouveau réseau. On note que chaque S_i ou chaque Q_j du cycle est contenu dans au moins deux couples d'arcs, si bien que ni S_i ni Q_j n'est pas éliminé.

Deux cas peuvent se présenter.

1) La procédure décrite ne modifie pas le réseau $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$; on n'a réussi à faire disparaître aucun S_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, et aucun Q_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, si bien que $(S^{(1)} \cup Q^{(1)}, \tilde{\mathcal{T}}^{(1)}) = (S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$.

2) Le nombre total de S_i et Q_j a diminué d'au moins une unité.

Lemme 7.7. *Si* $(S^{(1)} \cup Q^{(1)}, \tilde{\mathcal{T}}^{(1)}) = (S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$, *alors le réseau de transport* $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$ *est un cycle.*

Démonstration. Soit s et q le nombre respectif des points de S et Q. Comme le réseau $(S \cup Q, \mathcal{T})$ est connexe sans cycles, l'ensemble $\mathcal{T}$ a, par le lemme 7.6, $s + q - 1$ arcs, auquel cas $\tilde{\mathcal{T}}$ en renferme exactement $s + q$. La condition du lemme entraîne que chaque S_i et chaque Q_j ont au moins deux arcs incidents. On constate sans peine que chaque point est dans ce cas l'extrémité de deux arcs exactement, donc $s = q$. On trouve le résultat voulu par suite du lemme 7.2.

Ainsi, on construit dans le cas 1) un chemin arbitraire de longueur maximale qui commence en S_{i_0}. Ce chemin est le cycle cherché.

Si l'on est dans le cas 2), on répète le procédé consistant à éliminer successivement les points du réseau. Le réseau de départ $(S \cup Q, \tilde{\mathcal{T}})$ possède un cycle, si bien qu'on aboutit après plusieurs pas au cas 1).

On note que les opérations logiques qui constituent le procédé de recherche du chemin coûtent beaucoup moins en temps de calcul automatique que les opérations arithmétiques de la méthode du simplexe.

Voyons enfin une particularité intéressante du problème de transport.

THÉORÈME 7.4. *Si tous les nombres* a_i, b_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *sont des entiers, alors le problème* (7.1) *a une solution entière.*

DÉMONSTRATION. Si a_i, b_j sont tous des entiers, le programme de base initial obtenu par la méthode du coin nord-ouest est évidemment à valeurs entières. Il y a plus. Si x^0 est un programme en nombres entiers, θ défini par (7.13) est entier à chaque itération de la méthode des potentiels. Par conséquent, tout nouveau programme de base x^1 défini par (7.11), (7.12) est entier avec x^0.

Dans la méthode des potentiels, on aboutit à une solution après un nombre fini de pas, si bien que l'affirmation du théorème tombe sous le sens.

On se rappelle qu'on a motivé la méthode pour le problème non dégénéré seul, et la démonstration du théorème ne supposait que ce cas. L'affirmation démontrée est cependant juste pour tout problème de transport. En effet, on a un résultat plus fort, à savoir le

THÉORÈME 7.5. *Si tous les nombres* a_i, b_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *sont entiers, alors tout programme de base du problème de transport* (7.1) *est à valeurs entières.*

DÉMONSTRATION. La matrice A du problème jouit des propriétés suivantes.

1. Chaque élément de A est égal soit à 0, soit à 1.
2. Chaque colonne de A contient au plus deux éléments non nuls.
3. On partage les lignes de A en deux ensembles B et C. B contient m premières lignes et C, n dernières, et si une colonne a deux éléments non nuls, alors les lignes les contenant appartiennent l'une à B et l'autre à C, i. e. si $a_{i_1 j} = 1$, $a_{i_2 j} = 1$ et $a_{i_1} \in B$, alors $a_{i_2} \in C$.

On montre que tout mineur de la matrice A peut prendre seulement l'une des trois valeurs suivantes: 0, 1, —1.

Toute sous-matrice de A possède manifestement les propriétés 1 à 3. Il suffit donc de prouver que le déterminant d'une matrice carrée A quelconque munie de ces propriétés est égal à 0, 1, —1. On procède par récurrence sur l'ordre k de A carrée. Si $k = 1$, l'affirmation coïncide avec la propriété 1. On la suppose vraie pour l'ordre $k - 1$. Soit A une matrice carrée d'ordre k.

Si chaque colonne de A a exactement deux éléments $\neq 0$, la propriété 3 entraîne l'égalité de la somme des lignes de l'ensemble B et de la somme des lignes de C. Dans ce cas, A a donc ses lignes linéairement dépendantes, et $|A| = 0$. Si une colonne n'a pas d'autres

éléments à part 0, on a encore $|A| = 0$. Il reste le cas où une colonne de A a exactement un élément non nul. On développe le déterminant de A suivant cette colonne, auquel cas $|A| = \pm |\overline{A}|$, $\overline{A}$ étant une matrice extraite de A en supprimant la colonne concernée et la ligne qui en contient l'élément $\neq 0$. La matrice carrée $\overline{A}$ est d'ordre $k-1$, et $|\overline{A}| = 0, \pm 1$ par hypothèse de récurrence, d'où $|A| = 0, \pm 1$.

On obtient facilement le résultat voulu. Soit $x = \{x_{ij}\}$ un programme de base du problème (7.1), i. e. $Ax = \tilde{b}$, $x \geqslant 0$, où $\tilde{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$. On appelle A_σ la matrice formée de vecteurs-colonnes de A qui constituent la base associée au programme de base x et x_σ le vecteur dont les composantes sont les coordonnées positives de x. Dans ce cas, $A_\sigma x_\sigma = \tilde{b}$. On applique la règle de Cramer, il vient

$$x_{ij} = |A_{ij}|/|A_\sigma|,$$

A_{ij} étant une matrice obtenue de A_σ où on substitue le vecteur $\tilde{b}$ à la colonne a^{ij}. Tous les éléments de A_{ij} sont des nombres entiers, si bien que $|A_{ij}|$ est un entier. Etant donné $|A_\sigma| = \pm 1$, on a l'affirmation du théorème.

On connaît pour le problème de transport dégénéré des procédés de résolution spéciaux (comme dans la méthode du simplexe), mais il n'est pas dans nos intentions d'en parler.

§ 5. Programmes linéaires en nombres entiers

1. Problème du havresac. Un voyageur désire emporter dans son havresac n objets non nécessairement distincts qui doivent vérifier m contraintes telles que le poids, le volume, les dimensions linéiques, etc. Soit a_{ij} la i-ième caractéristique de l'objet j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ et b_i la contrainte de poids, de volume, etc. On désigne par x_j le nombre d'objets j à emporter, $j = 1, 2, \ldots, n$. On suppose connue l'utilité c_j d'un objet j. Formalisons ce problème:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.14}$$

$$x_j \geqslant 0, \ x_j \text{ entier}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Il ne s'agit pas d'un programme linéaire vu que la condition d'intégrité est impossible à exprimer par des inéquations linéaires.

Or, de nombreux problèmes de caractère pratique se ramènent à cette forme. C'était justement le cas du problème primitif du havresac à la différence qu'on avait alors affaire à des bombardiers et à leur charge mortelle.

2. **Problème d'affectation.** Soit n avions à affecter à n lignes aériennes. On sait que l'avion i affecté à la ligne aérienne j procure le revenu c_{ij}. On recherche la meilleure manière d'affecter les avions pour maximiser le revenu total.

On pose

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'avion } i \text{ est affecté à la ligne aérienne } j, \\ 0, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Voici le modèle mathématique du problème:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$x_{ij} \text{ est soit } 0, \text{ soit } 1.$$

Les contraintes signifient que chaque avion doit être affecté à une seule ligne aérienne et que chaque ligne doit être desservie par un seul avion.

3. **Problème du voyageur de commerce.** Soient des villes numérotées par 0, 1, 2, . . ., n. Le voyageur de commerce parti de la ville 0 doit passer une fois par toutes les villes restantes et revenir à 0. On connaît les distances c_{ij} entre les villes i, j ($i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$). On demande le chemin le plus court.

On introduit les variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le voyageur de commerce quitte } i \text{ pour } j, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j, \\ 0, & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

$$i, j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

On aura besoin, de plus, des variables supplémentaires u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Soit le problème

$$\min \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.16}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.17}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leqslant n - 1, \; i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.18}$$

$$x_{ij} \text{ est soit } 0, \text{ soit } 1.$$

Les variables u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ne figurent que dans les contraintes. Elles jouent un rôle subalterne mais nécessaire (on le constatera plus loin).

On vérifie que le modèle formel (7.16) à (7.18) est équivalent au problème posé. Les conditions (7.16) signifient que le voyageur de

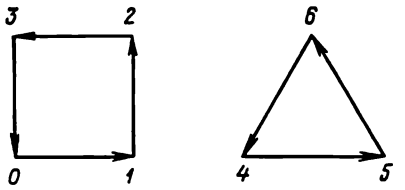


Fig. 7.5.

commerce passe par la ville $j \neq 0$ une seule fois. Il résulte de (7.17) qu'il sort de la ville $i \neq 0$ une seule fois.

Mais les conditions citées ne suffisent pas à elles seules qu'un chemin soit connexe. Ainsi, le chemin de la fig. 7.5 a beau vérifier (7.16) et (7.17), il ne reflète pas les conditions du problème.

Il se trouve que la propriété de connexité est garantie par les conditions (7.18) d'aspect quelque peu artificiel. Plus précisément, elles interdisent tout cycle évitant la ville 0.

En effet, soit $(\{x_{ij}\}, \{u_i\})$ une solution du problème (7.16) à (7.18). On associe au programme $\{x_{ij}\}$) un réseau de transport en imitant le cas du problème de transport (voir § 2): un arc (i, j) appartient au réseau si et seulement si $x_{ij} = 1$. Il est déjà connu que les conditions (7.16), (7.17) déterminent la propriété de chaque ville du réseau d'avoir exactement deux arcs incidents.

Le lemme 7.1 entraîne la présence des cycles. On admet qu'il existe un cycle évitant 0 et comprenant k arcs. On fait la somme des inéquations (7.18) correspondant aux arcs (i, j) du cycle. La chose est possible car avec $i \neq 0$, $j \neq 0$ (le cycle ne passe pas par le point

0), on trouve une inéquation (7.18) pour tout arc (i, j). La sommation fait disparaître toutes les quantités u_i (le chemin étant cyclique), il vient l'inégalité contradictoire $nk \leqslant (n-1)k$. Toute solution du problème (7.16) à (7.18) correspond donc au cycle passant par 0. On en déduit l'unicité du cycle pour le programme $\{x_{ij}\}$ donné.

Il reste à montrer qu'un programme de ce problème est associé à tout chemin.

Soit un cycle quelconque d'extrémité initiale 0:

$$l_0 l_1 l_2 \ldots l_n l_0,$$

où $l_0 = 0$, tous les l_r sont distincts deux à deux, $1 \leqslant l_r \leqslant n$, $r = 1, 2, \ldots, n$.

Prenons un programme défini comme suit. On choisit x_{ij} conformément à l'interprétation générale de ces variables. Les valeurs u_i sont données par la formule: si $i = l_r$, alors $u_r = r$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Autrement dit, u_i est le numéro d'ordre de la ville i dans la route du voyageur de commerce. On montre que l'ensemble ainsi défini $\{x_{ij}\}$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, et $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est un programme du problème (7.16) à (7.18).

On note que $u_i - u_j \leqslant n - 1$ pour tous les $i, j = 1, 2, \ldots, n$, parce que $1 \leqslant u_i \leqslant n$. Il en découle la validité de (7.18) pour tout (i, j) à condition que $x_{ij} = 0$. Si $x_{ij} = 1$, $i, j \neq 0$, on a par construction du programme $i = l_r$, $j = l_{r+1}$ pour certain r, $1 \leqslant r \leqslant n - 1$. Dans ce cas, $u_i = r$, $u_j = r + 1$ et $u_i - u_j = 1$. D'où

$$u_i - u_j + nx_{ij} = n - 1.$$

4. Problème des quatre couleurs. Un théorème remarquable a été démontré en 1976 aux termes duquel toute carte géographique peut être coloriée avec 4 couleurs au plus (voir [23]). Un problème mathématique des plus anciens et connus a trouvé donc une solution. Chose curieuse, le résultat a été justifié en calcul automatique: quand les théoriciens se sont avérés impuissants à vérifier ladite propriété pour de nombreuses cartes (en nombre fini), ce sont les ordinateurs qui ont donné la réponse.

Formulons le problème. Soit une carte géographique planaire telle que la frontière de chaque pays soit une courbe continue fermée. Deux pays sont dits limitrophes s'ils ont une frontière commune (une portion de courbe de longueur positive). On demande de colorier la carte avec 4 couleurs de sorte que deux pays limitrophes ne soient pas de la même couleur.

On montre que le problème se ramène à un programme linéaire en nombres entiers.

On suppose que les pays sont numérotés par les indices $j = 1, 2, \ldots, n$ et que x_j est une variable entière qui peut être 0, 1, 2, 3, i.e. elle prend autant de valeurs qu'il y a de couleurs.

On désigne par Γ l'ensemble des couples (i, j) associés aux pays limitrophes :

$$\Gamma = \{(i, j) \mid \text{les pays } i, j \text{ sont limitrophes}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Les valeurs x_i et x_j sont distinctes pour tout $(i, j) \in \Gamma$, i. e. $x_i \neq x_j$. Les variables étant entières, cela signifie qu'on a ou bien $x_j - x_i \geqslant 1$, ou bien $x_i - x_j \geqslant 1$.

Pour écrire cette alternative en termes d'inéquations linéaires, on introduit les variables supplémentaires u_{ij} pour chaque couple $(i, j) \in \Gamma$. Ces variables sont égales soit à 0, soit à 1, et les conditions ci-dessous impliquent $u_{ij} = 1$ et $u_{ij} = 0$ pour $x_i < x_j$ et $x_i > x_j$ respectivement.

Prenons les inégalités $x_i - x_j \geqslant 1 - 4u_{ij}$, $x_j - x_i \geqslant -3 + 4u_{ij}$. Si $u_{ij} = 1$, alors $x_i - x_j \geqslant -3$, $x_j - x_i \geqslant 1$. La première inégalité est superflue car elle est vérifiée pour toutes les valeurs x_i, x_j réalisables, et la deuxième garantit $x_j > x_i$. Si $u_{ij} = 0$, on obtient de même $x_i - x_j \geqslant 1$.

Enonçons le problème en nombres entiers équivalent au problème des 4 couleurs.

On demande la solution du système d'inéquations linéaires

$$x_i - x_j + 4u_{ij} \geqslant 1, \quad x_j - x_i - 4u_{ij} \geqslant -3, \quad (i, j) \in \Gamma,$$

sous les conditions complémentaires imposées aux variables :

$$x_j = 0, 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$u_{ij} = 0, 1, \quad (i, j) \in \Gamma.$$

5. Examinons les problèmes décrits de la programmation linéaire en nombres entiers. L'écriture formelle ne diffère chaque fois d'un programme linéaire usuel que par des contraintes supplémentaires sur les valeurs des variables, d'où le nom de problèmes en nombres entiers. Il y a nombre de modèles significatifs, importants dans la pratique, qui ramènent à des problèmes formels du genre de ceux du présent paragraphe. Au début, la condition d'intégrité des variables en a sérieusement contrecarré l'étude et la résolution. Il semble que la tactique la plus naturelle consistait à modifier un peu les méthodes classiques de la programmation linéaire. On dirait, par exemple, qu'il suffit de résoudre un problème en nombres entiers par une méthode numérique quelconque spéciale à la programmation linéaire (sans prêter attention à la condition d'intégrité) pour ensuite arrondir les coordonnées de la solution aux entiers. Mais cette approche « de l'ingénieur » s'avère inconsistante même

dans des cas simples. Prenons, par exemple, le problème (voir [24])

$$\begin{gathered}\max\,(x_1 - 3x_2 + 3x_3)\\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 3,\\ 4x_1 - 3x_2 \leqslant 2,\\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 4,\\ x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ entiers} \geqslant 0.\end{gathered}$$

On fait abstraction de la condition d'intégrité et on trouve le programme optimal $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4^1/_2$. On peut arrondir le résultat de quatre manières différentes: (0, 0, 4), (0, 0, 5), (1, 0, 4), (1, 0, 5). On voit de suite qu'aucun de ces vecteurs n'est un programme pour le problème proposé et que la différence avec la solution entière optimale $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ est notable.

Il n'empêche pas que certains problèmes en nombres entiers se ramènent directement aux programmes linéaires. Prenons, par exemple, le problème d'affectation (7.15). Si l'on substitue à la condition imposée aux variables x_{ij} l'inégalité $x_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, on retrouve le problème de transport (7.1). Comme les nombres des seconds membres des contraintes de (7.15) sont des entiers, tous les programmes de base sont à valeurs entières (th. 7.5). Par conséquent, on obtient une solution entière du problème (7.15) par toute méthode numérique de la programmation linéaire, et la condition de non-négativité et les autres contraintes-équations garantissent l'égalité à 0 ou à 1 de chaque composante de la solution.

S'agissant d'un problème en nombres entiers plus général, tel que le problème du havresac (7.14), la réduction en question n'est plus possible. Aussi les travaux théoriques correspondants ont été poursuivis dans deux directions différentes. La première concerne le problème entier général et porte le nom de méthode de coupes (ou de troncature). Il s'agit en l'occurrence de faire correspondre au problème intègre un programme linéaire usuel et de résoudre celui-là par le biais de celui-ci.

La seconde tendance consiste à élaborer des procédés foncièrement nouveaux pour des problèmes particuliers (du type voyageur de commerce). Parmi les procédés le plus employés, citons les méthodes « branche and bound » (séparation et évaluation progressive). On note qu'on utilise également les propriétés des problèmes correspondants de la programmation linéaire.

Seule sera étudiée dans les paragraphes suivants la première façon d'approcher la programmation linéaire en nombres entiers. Sans nous occuper des détails de nature mathématique, nous nous placerons dans un cas simple à souhait pour donner une idée nette de l'essence

et des possibilités de la méthode considérée. Quant à l'étude circonstanciée des algorithmes de résolution, nous renvoyons le lecteur à [24].

§ 6. Méthode de coupes en programmation linéaire en nombres entiers

1. Prenons un problème sous forme canonique et ajoutons la contrainte d'intégrité:

$$\max \langle c, x \rangle \tag{7.19}$$

$$Ax = b, \tag{7.20}$$

$$x \geqslant 0, \tag{7.21}$$

x un vecteur entier.

La condition d'intégrité des variables complique singulièrement le problème de programmation linéaire (7.19) à (7.20). Il se peut, par exemple, que le problème (7.19) à (7.21) admette des programmes (entiers) réalisables et que la fonction économique soit bornée sur l'ensemble admissible sans qu'elle atteigne son maximum. Ainsi, le problème

$$\max (\sqrt{2}\, x_1 - x_2)$$

$$\sqrt{2}\, x_1 - x_2 + x_3 = 1, \quad x_1, \ x_2, \ x_3 \geqslant 0,$$

ne possède pas de solutions entières, et il admet pour solution tout vecteur $((1 + \alpha)/\sqrt{2}, \alpha, 0)$, $\alpha \geqslant 0$, si cette contrainte n'est pas imposée.

On comprend donc que l'on démontre les algorithmes de résolution numérique des problèmes (7.19) à (7.21) en introduisant certaines conditions supplémentaires.

Notre souci de simplifier l'exposé nous fait choisir, pour le cas considéré, les plus fortes contraintes possibles.

I. L'ensemble X des programmes du problème (7.19) à (7.20) (sans condition d'intégrité) est supposé borné, i. e. c'est un polyèdre.

Cette hypothèse entraîne la propriété d'être fini de l'ensemble $\tilde{X}$ des programmes entiers du problème augmenté (7.19) à (7.21).

II. On suppose que tous les coefficients c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, de la fonction économique sont des entiers.

La condition II fait que la forme linéaire à maximiser $\langle c, x \rangle$ est à valeurs entières pour tout programme entier $x \in \tilde{X}$. On dit que l'intégrité de la fonction économique est garantie.

Bien que les conditions I et II soient assez sévères, on ne les affaiblit que légèrement (sinon on risque de compromettre les résultats).

2. Il existe en principe une possibilité de ramener le problème (7.19) à (7.21) à la recherche du programme optimal d'un programme linéaire (les variables n'étant pas astreintes à être des entiers). Soit comme toujours X un ensemble polyédrique défini par les conditions (7.19), (7.20). On note $\tilde{X}$ l'ensemble de tous les vecteurs entiers $\tilde{x}$ éléments de X. Autrement dit, $\tilde{X}$ est défini par les conditions (7.19) à (7.20), i. e.

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \mid x \in X, \ \tilde{x}_i \text{ entier}, \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Par définition, $\tilde{X} \subseteq X$. On appelle X^e l'enveloppe convexe de $\tilde{X}$: $X^e = C(\tilde{X})$ (voir définition 2.9), auquel cas $X^e \subseteq X$.

Ainsi, on a associé à l'ensemble polyédrique X un ensemble convexe $X^e \subseteq X$ ainsi défini : X^e est le plus petit ensemble convexe des vecteurs entiers de X.

Selon l'hypothèse I, X est un polyèdre, si bien que $\tilde{X}$ est fini. Il résulte du théorème 2.14 que X^e convexe est un polyèdre. Etant donné le théorème 2.26 (équivalence de deux définitions d'un ensemble polyédrique), X^e peut être donné par des inéquations linéaires en nombre fini.

Nous voulons insister sur la différence essentielle entre X et X^e.

Définition 7.5. Un polyèdre dont tous les points extrêmes sont entiers (i. e. toutes les coordonnées de ces points sont des nombres entiers) est dit *entier*.

Le polyèdre X^e est manifestement un polyèdre entier parce qu'il n'a pas d'autres points extrêmes que des points de l'ensemble $\tilde{X}$ des programmes à valeurs entières.

L'étude de la correspondance $X \to X^e$ est rendue légitime par le résultat simple suivant.

Théorème 7.6. *Tout programme de base optimal du problème de programmation linéaire*

$$\max_{x \in X^e} \langle c, x \rangle \tag{7.22}$$

est solution du problème (7.19) *à* (7.21).

Démonstration. Soit $\tilde{x}^*$ un programme de base optimal de (7.22) et x^* une solution du problème originel (7.19) à (7.21). Du fait que

$\tilde{x}^* \in X^e \subseteq X$, on a $\langle c, \tilde{x}^* \rangle \leqslant \langle c, x^* \rangle$. D'autre part, $\langle c, \tilde{x}^* \rangle \geqslant \langle c, x^* \rangle$ car $x^* \in \tilde{X} \subseteq X^e$ (x^* est un programme entier), d'où $\langle c, \tilde{x}^* \rangle = d$, d étant la valeur de (7.19)-(7.21), ce qui achève la démonstration.

Il y a lieu de souligner que le théorème 7.6 ne parle que de la *possibilité* de ramener la résolution d'un problème entier à la recherche des programmes de base d'un problème de la forme (7.22). La difficulté majeure consiste en l'occurrence à donner explicitement le polyèdre X^e par un système d'inéquations linéaires pour pouvoir aborder le problème (7.22) par des méthodes numériques de la programmation linéaire. Il paraît qu'il s'agit d'un cas aussi compliqué au sens numérique que le problème primitif de chercher un programme entier optimal.

L'idée de « tronquer » l'ensemble X s'est avérée néanmoins fructueuse. Elle est à la base de plusieurs algorithmes de la programmation linéaire en nombres entiers qui sont connus sous le nom de méthodes de troncature (ou de coupes).

3. Voyons le principe des méthodes de troncature. Supposons qu'on a construit efficacement une suite $\{\mathcal{L}_r\}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, de programmes linéaires définis chacun par son polyèdre X_r propre et la même fonction économique $\langle c, x \rangle$:

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_r\colon \max \langle c, x \rangle \\ x \in X_r, \end{gathered} \tag{7.23}$$

la suite possédant les propriétés suivantes:

1) $X_0 = X$, i. e. on prend pour X_0 l'ensemble des programmes du problème (7.19), (7.20);

2) $X_r^e = X^e$, $r = 1, 2, \ldots$;

3) si le vecteur optimal x_r^* du problème $\mathcal{L}_r$ ne vérifie pas la condition d'intégrité, il ne constitue pas un programme du problème $\mathcal{L}_{r+1}$, i. e. $x_r^* \notin X_{r+1}$.

On note que si x_r^*, solution de $\mathcal{L}_r$, est entier à un pas r, alors il est solution du problème initial (7.19) à (7.21) en vertu de 2).

On comprend intuitivement que construire de proche en proche les problèmes $\mathcal{L}_r$, $r = 1, 2, \ldots$, c'est approcher dans un sens l'ensemble X^e par les ensembles X_r.

C'est Gomory qui a été le premier à proposer des procédés de génération de la suite $\{\mathcal{L}_r\}$ qui garantissent la résolution du problème (7.19) à (7.21) en un nombre fini de pas. Le paragraphe suivant traite le premier algorithme de Gomory qui utilise toutes les idées de base des méthodes de coupes.

§ 7. Premier algorithme de Gomory pour les problèmes de la programmation linéaire en nombres entiers

1. On introduit la notion de coupe efficace qui constitue le pivot d'un grand nombre de méthodes numériques en programmation linéaire en nombres entiers.

DÉFINITION 7.6. Soit x^* un programme optimal du problème (7.19), (7.20) qui n'est pas à valeurs entières. L'inégalité

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \leqslant \gamma_0$$

ou

$$\langle \gamma, x \rangle \leqslant \gamma_0, \tag{7.24}$$

où $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ est une *coupe efficace* à condition de satisfaire aux conditions suivantes:

a) le vecteur x^* ne vérifie pas (7.24), i. e. $\langle \gamma, x^* \rangle > \gamma_0$, (*condition de coupe*);

b) si x est un programme entier du problème (7.19), (7.20) (i. e. x est un programme de (7.19)-(7.21)), alors x remplit (7.24) (*condition d'efficacité*).

On conçoit que le fait d'ajouter (7.24) aux conditions (7.19), (7.20) réduit l'ensemble admissible X tout en conservant ses points entiers. Un emploi répété de ce procédé « approche » successivement le polyèdre X^e moyennant des contraintes linéaires.

La notion de coupe efficace est à l'origine de deux problèmes. Premièrement, il faut formuler l'algorithme de coupes général pour un problème arbitraire de la programmation linéaire en nombres entiers. Deuxièmement, il s'agit de construire une coupe efficace de façon que le problème (7.19) à (7.21) soit résolu en un nombre fini de pas, i. e. on prive chaque fois l'ensemble X d'une partie « superflue » suffisamment grande.

On note que la seconde condition est assez fine. Voyons, par exemple, le procédé de génération des coupes efficaces de Dantzig.

Soit x^* un programme de base optimal du problème (7.19), (7.20), σ et ω les ensembles d'indices des variables de base et hors base respectivement qui sont associés à une base du programme x^*. Dans ce cas, $x_j^* = 0$ pour $j \in \omega$. Cette propriété aidant, on construit facilement une coupe efficace pour x^* programme non entier. Cela peut être l'inégalité $\sum_{j \in \omega} x_j \geqslant 1$.

En effet, la condition de coupe est triviale du moment que $\sum_{j \in} x_j^* = 0$. La condition d'efficacité est respectée elle aussi parce qu'avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ programme entier du problème

(7.19), (7.20), la quantité $\sum_{j\in\omega} x_j$, $x_j \geqslant 0$, $j \in \omega$, ne peut être inférieure à 1 que si $x_j = 0$ pour tout $j \in \omega$.

Le programme x est donc de base et on prend pour base correspondante la base associée à x^*. Il est connu (voir (5.7)) que tout programme de base est défini de façon unique par la base associée, si bien que $\sum_{j\in\omega} x_j < 1$ implique $x = x^*$: égalité impossible car x est un vecteur entier et x^* ne l'est pas.

Malgré sa simplicité, ce procédé de construction des coupes efficaces s'est avéré peu puissant vu que la résolution en un nombre fini de pas n'est garantie que pour une classe restreinte de problèmes en nombres entiers.

2. Voyons le procédé proposé par Gomory. On désigne par $[\alpha]$ la partie entière d'un nombre réel quelconque α, i. e. $[\alpha]$ est le plus grand entier k au plus égal à α.

La partie fractionnaire $\{\alpha\}$ de α est par définition $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Voici une propriété évidente de la partie fractionnaire d'un nombre réel quelconque : $1 > \{\alpha\} \geqslant 0$, et $\{\alpha\} = 0$ si et seulement si α est un entier.

Soit x^* une solution de base non entière du problème (7.19), (7.20), $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}$ la base associée et $\mathfrak{B}$ le tableau simplicial lexicographique correspondant.

Prenons le système réduit relativement à la base donnée (et à $\mathfrak{B}$) du programme x^* :

$$x_0 + \sum_{j\in\omega} \alpha_{0j} x_j = \alpha_{00}. \tag{7.25}$$

$$x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}, \quad i \in \sigma. \tag{7.26}$$

Comme $x_j^* = 0$ pour $j \in \omega$, les quantités $x_0^* = \langle c, x^* \rangle$, x_i^*, $i \in \sigma$, seules ne sont pas à valeurs entières.

Soit s un indice $(0 \leqslant s \leqslant n)$ tel que x_s^* n'est pas un entier. On prend la s-ième ligne du tableau $\mathfrak{B}$ (l'équation s de (7.25), (7.26)), et on forme l'expression

$$z_s(x) = -\{\alpha_{s0}\} + \sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\} x_j. \tag{7.27}$$

Théorème 7.7. *Si $x \in \tilde{X}$ est un programme entier du problème* (7.19), (7.20), *alors*

$$z_s(x) \text{ est un entier}, \quad z_s(x) \geqslant 0.$$

Démonstration. La relation $\alpha_{sj} = [\alpha_{sj}] + \{\alpha_{sj}\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, permet pour $i = s$ de tirer de (7.26)

$$x_s + \sum_{j\in\omega} ([\alpha_{sj}] + \{\alpha_{sj}\}) x_j = [\alpha_{s0}] + \{\alpha_{s0}\},$$

d'où

$$x_s - [\alpha_{s0}] + \sum_{j \in \omega} [\alpha_{sj}] x_j = \{\alpha_{s0}\} - \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j.$$

Le premier membre est un entier, si bien qu'il en est de même du nombre

$$-z_s(x) = \{\alpha_{s0}\} - \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j.$$

La propriété connue de la partie fractionnaire et $x_j \geqslant 0$, $j \in \omega$, entraînent

$$\{\alpha_{s0}\} - \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j < 1,$$

i. e. $-z_s(x) < 1$ ou $z_s(x) > -1$. Mais $z_s(x)$ est un entier, d'où $z_s(x) \geqslant 0$.

Conséquence. *Si x_s^* $(= \alpha_{s0})$ est un nombre non entier et l'ensemble $\widetilde{X}$ des programmes du problème entier* (7.19) *à* (7.21) *est non vide, alors certains $\{\alpha_{sj}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sont positifs.*

En effet, $\{\alpha_{sj}\}$ sont manifestement tous non négatifs. Admettons que $\{\alpha_{sj}\} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Si $\widetilde{X} \neq \varnothing$ et $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, alors $z_s(\widetilde{x}) = -\{\alpha_{s0}\}$, ce qui contredit, en raison de $0 < \{\alpha_{s0}\} < 1$, le résultat du théorème 7.7 ($z_s(\widetilde{x})$ est un entier).

Remarque. La démonstration du théorème a utilisé l'hypothèse II (n° 1, § 6) de fonction économique entière. En effet, la quantité

$$x_0 - [\alpha_{00}] + \sum_{j \in \omega} [\alpha_{0j}] x_j$$

est entière pour $s = 0$, (à condition que $x \in \widetilde{X}$) si $x_0 = \langle c, x \rangle$ l'est.

D'où le

Théorème 7.8. *Si le nombre x_s^* est non entier, l'inégalité*

$$\sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j \geqslant \{\alpha_{s0}\} \tag{7.28}$$

est une coupe efficace.

Démonstration. On teste la condition de coupe de la définition 7.6. Du moment que $x_s^* = \alpha_{s0}$ et x_s^* est non entier, on a $\{\alpha_{s0}\} > 0$. On a $x_j^* = 0$ pour $j \in \omega$, si bien que $\sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j^* = 0$, et le vecteur x^* ne vérifie pas (7.28). Quant à la condition d'efficacité, elle découle de l'affirmation $z_s(x) \geqslant 0$ du théorème 7.7.

3. On décrit le premier algorithme de Gomory.

On appelle $\mathcal{L}_0$ le problème (7.19), (7.20). A la première étape de l'algorithme, on cherche le maximum lexicographique de $\mathcal{L}_0$ (voir § 6, ch. VI). On désigne par

$$x(0) = (x_0(0),\ x_1(0),\ \ldots,\ x_n(0))$$

un vecteur de dimension $n+1$ tel que $(x_1(0), \ldots, x_n(0))$ soit solution du l-problème $\mathcal{L}_0$ et $x_0(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(0)$ la valeur de la forme linéaire. Chaque fois qu'il ne s'ensuivra pas de confusion, on dira que $x(0)$ est un programme optimal du problème lexicographique $\mathcal{L}_0$ (bien que nous appelions programme un vecteur formé de n dernières coordonnées de $x(0)$).

Le vecteur $x(0)$ est un programme de base (th. 6.8), et il est un pseudo-programme strictement réalisable de $\mathcal{L}_0$ par le théorème 6.10.

Si $x(0)$ est entier, il constitue évidemment une solution du problème (7.19) à (7.21).

Dans le cas contraire, on cherche *le plus petit* s, $0 \leqslant s \leqslant n$, tel que la quantité $x_s(0)$ ne soit pas entière. Soit $\mathfrak{B}(0)$ le tableau simplicial sous forme lexicographique associé à $x(0)$. On utilise les coefficients de la s-ième ligne de $\mathfrak{B}(0)$ (i. e. les coefficients du système réduit (7.25), (7.26)) pour construire une coupe efficace par le procédé décrit dans le numéro précédent.

On introduit la variable additionnelle x_{n+1} et on considère le problème $\mathcal{L}_1$:

$$\max \langle c, x \rangle \qquad (7.29)$$

$$Ax = b,$$

$$\sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j - x_{n+1} = \{\alpha_{s0}\}, \qquad (7.30)$$

$$x \geqslant 0,\ x_{n+1} \geqslant 0. \qquad (7.31)$$

On cherche à l'étape suivante le maximum lexicographique de ce problème. L'algorithme de Gomory présente le grand avantage de fournir facilement le pseudo-programme strictement réalisable pour faire démarrer la méthode duale à appliquer à $\mathcal{L}_1$. En effet, on prend pour ce pseudo-programme le vecteur

$$y(1) = (x_0(0),\ x_1(0),\ \ldots,\ x_n(0),\ x_{n+1}(0)),$$

où

$$x_{n+1}(0) = \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j(0) - \{\alpha_{s0}\} = -\{\alpha_{s0}\}.$$

Car $y(1)$ vérifie évidemment (avec $x(0)$) les contraintes (7.29), (7.30) et toutes les conditions (7.31) sauf $x_{n+1}(0) = -\{\alpha_{s0}\} < 0$.

En outre, y (1) est un vecteur de base pour le système d'équations (7.29), (7.30) parce que le système

$$\left\{\begin{pmatrix} a^{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{i_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a^{i_m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

est libre et constitue la base relative à y (1) si $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}$ est la base associée à x (0). On montre que y (1) est un pseudo-programme strictement réalisable. On construit le tableau du simplexe correspondant à la base concernée de y (1). Il suffit d'écrire en bas de $\mathfrak{B}$ (0) la ligne

$$(-\{\alpha_{s0}\}, -\{\alpha_{sj_1}\}, \ldots, -\{\alpha_{sj_{n-m}}\}),$$

avec $\omega = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}\}$ l'ensemble des numéros des variables hors base qui correspond au tableau $\mathfrak{B}$ (0) pour le programme de base x (0) (voir § 2, ch. VI). Le vecteur x (0) étant un pseudo-programme strictement réalisable, toute colonne β^j, $j \in \omega$, de $\mathfrak{B}$ (0) est l-positive: $\beta^j \succ 0$, $j \in \omega$. Il en résulte la même propriété de toute colonne (sauf la première qui est égale à y (1)) du tableau sous forme lexicographique relatif au vecteur de base y (1), i. e.

$$\begin{pmatrix} \beta^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{pmatrix} \succ 0, \quad j \in \omega.$$

Ainsi, il suffit de connaître une solution x (0) du l-problème $\mathcal{L}_0$ et le tableau associé $\mathfrak{B}$ (0) pour obtenir sans calculs supplémentaires un pseudo-programme strictement réalisable de départ y (1) pour le problème $\mathcal{L}_1$ et former le tableau simplicial lexicographique correspondant.

Il se peut que $\mathcal{L}_1$ soit impossible. On arrête la résolution du problème en nombres entiers (7.19) à (7.21) car on a le

THÉORÈME 7.9. *Si le problème $\mathcal{L}_1$ n'admet pas de maximum lexicographique, l'ensemble $\widetilde{X}$ des points entiers du problème* (7.19) *à* (7.21) *est vide.*

DÉMONSTRATION. L'ensemble X des vecteurs vérifiant $Ax = b$, $x \geqslant 0$, est borné sous l'hypothèse I (n° 1, § 6), si bien qu'il en est de même de l'ensemble des programmes du problème $\mathcal{L}_1$. Aussi la seule cause de l'absence du maximum lexicographique de $\mathcal{L}_1$ est la vacuité de l'ensemble de ses programmes. On montre que dans ce cas $\widetilde{X}$ est vide lui aussi.

On suppose le contraire, i. e. $\widetilde{X} \neq \varnothing$, et soit $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n) \in \widetilde{X}$. Par le théorème 7.7, la quantité

$$\widetilde{x}_{n+1} = -\{\alpha_{s0}\} + \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} \widetilde{x}_j$$

est non négative, ce qui signifie que le vecteur $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1})$ est un programme de $\mathcal{L}_1$: contradiction qui démontre le théorème.

Soit $x(1) = (x_0(1), x_1(1), \ldots, x_n(1), x_{n+1}(1))$ solution du l-problème $\mathcal{L}_1$. Etant donnés $\mathcal{L}_1$ et $x(1)$, on construit de même les problèmes $\mathcal{L}_r$, $r = 2, 3, \ldots$, et les solutions $x(r) \in \mathbf{R}^{n+1+r}$ correspondantes.

On note que l'algorithme de Gomory définit univoquement la suite $x(r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ (cela résulte du théorème 6.7 et de s choisi de façon unique). Il convient également de dire que l'indice s n'est jamais supérieur à n: $0 \leqslant s \leqslant n$. En effet, si $x_j(r)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, sont tous des entiers, le théorème 7.7 entraîne qu'il en est de même de $x_{n+1}(r)$, $x_{n+2}(r)$, ...

Si le vecteur

$$x(r) = (x_0(r), x_1(r), \ldots, x_n(r), \ldots, x_{n+1}(r))$$

est entier à un pas r, le vecteur $(x_0(r), x_1(r), \ldots, x_n(r))$ est solution du problème (7.19) à (7.21). On laisse au lecteur le soin de démontrer ce résultat évident.

Le passage du vecteur $x(r)$ à $x(r+1)$ par l'algorithme décrit constitue un *cycle*, chaque cycle étant composé d'un certain nombre d'itérations de la méthode duale du simplexe.

S'agissant du premier algorithme de Gomory, on se demande en premier lieu si l'on aboutit nécessairement à $x(r)$ entier au bout des cycles en nombre fini.

La réponse est donnée au numéro suivant.

4. On démontre le caractère fini de l'algorithme de Gomory. On utilisera les notations suivantes:

$x(0) = (x_0(0), x_1(0), \ldots, x_n(0))$, où $(x_1(0), \ldots, x_n(0))$ est une solution du l-problème $\mathcal{L}_0$, $x_0(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(0)$ la valeur correspondante de la forme linéaire;

$y(1) = (x_0(0), x_1(0), \ldots, x_n(0), x_{n+1})$, où

$$x_{n+1} = \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j(0),$$

est un pseudo-programme strictement réalisable de départ dans la résolution du problème $\mathcal{L}_1$ par la méthode duale sous forme lexicographique;

$\bar{y}(1) = (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \ldots, \bar{y}_n(1), \bar{y}_{n+1}(1))$, vecteur obtenu de $y(1)$ après la première itération de la méthode duale lexicographique.

On introduit de même les symboles $x(r)$, $y(r+1)$, $\bar{y}(r+1)$, $r = 1, 2, \ldots$

On a en vertu des propriétés de la méthode duale lexicographique (th. 6.6)

$$y(r) \succ \bar{y}(r) \succcurlyeq x(r). \tag{7.32}$$

LEMME 7.8. *Soit s le plus petit indice tel que* $x_s(0)$ *ne soit pas un nombre entier. On a*

$$(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0), [x_s(0)]) \succcurlyeq (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \ldots \\ \ldots, \bar{y}_{s-1}(1), \bar{y}_s(1)).$$

DÉMONSTRATION. Comme $y(1) \succ \bar{y}(1)$ (voir (7.32)), deux cas peuvent se présenter:

1) $(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0)) \succ (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \ldots, \bar{y}_{s-1}(1))$;

2) $(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0)) = (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \ldots, \bar{y}_{s-1}(1))$.

Dans le premier cas, l'affirmation est triviale par définition de l'ordre lexicographique.

Soit 2). Selon la règle 1* de la méthode duale du simplexe, c'est la variable x_{n+1} qui est candidate à une sortie de la base à la première itération de la résolution du problème $\mathcal{L}_1$ car $x_j(0) \geqslant 0$, $j \in \omega$, $x_{n+1} < 0$ dans le vecteur $y(1)$. Soit $k \in \omega$ un indice tel que

$$-\{\alpha_{sk}\} < 0, \tag{7.33}$$

$$\begin{pmatrix} \beta^k \\ -\{\alpha_{sk}\} \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} \beta^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{pmatrix}$$

pour tout $j \in \omega$ si $-\{\alpha_{sj}\} < 0$. La variable x_k est introduite dans la base par la règle 2^{*l}.

Etant donné (6.29), le cas 2) n'est possible que si $\beta_{ik} = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$. Le vecteur $x(0)$ est un pseudo-programme strictement réalisable de $\mathcal{L}_0$, si bien que le tableau $\mathfrak{B}(0)$ a toutes ses colonnes β^j, $j \in \omega$, l-positives; en particulier, $\beta^k \succ 0$. Par conséquent, la coordonnée β_{sk} de cette colonne est non négative. On note que $\beta_{sk} = \alpha_{sk}$ (i. e. $0 \leqslant s \leqslant n$ et $s \in \omega$ en vertu des formules du § 3, ch. VI). Avec la condition (7.33), $\alpha_{sk} \neq 0$. Aussi $\alpha_{sk} > 0$ et

$$\alpha_{sk} \geqslant \{\alpha_{sk}\}. \tag{7.34}$$

La formule (6.29) de la transformation du tableau simplicial donne

$$\bar{y}_s(1) = x_s(0) - \frac{\{\alpha_{s0}\}}{\{\alpha_{sk}\}} \alpha_{sk}.$$

On se rappelle que $x_s(0) = \alpha_{s0}$, il vient par suite de (7.34)

$$\bar{y}_s(1) = \alpha_{s0} - \frac{\{\alpha_{s0}\}}{\{\alpha_{sk}\}}\alpha_{sk} \leqslant \alpha_{s0} - \frac{\{\alpha_{s0}\}}{\{\alpha_{sk}\}}\{\alpha_{sk}\} =$$
$$= \alpha_{s0} - \{\alpha_{s0}\} = [\alpha_{s0}] = [x_s(0)]$$

ce qui démontre le lemme.

Remarque. Si le problème de départ (7.19) à (7.21) a un sens, la conséquence du théorème 7.7 entraîne l'existence d'un indice k la vérifiant (7.33).

Conséquence.

$$(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0), [x_s(0)]) \geqslant$$
$$\geqslant (x_0(r), x_1(r), \ldots, x_{s-1}(r), x_s(r)).$$

En effet, cette inégalité découle pour $r = 1$ du lemme et de la seconde inégalité (7.32). Dans le cas de r quelconque, on utilise $y_j(r) = x_j(r)$, $0 \leqslant j \leqslant n$, et $y(r) \geqslant x(r)$ de (7.32).

Théorème 7.10. *Si l'on est dans les hypothèses* I *et* II *du* n° 1, § 6, *le premier algorithme de Gomory aboutit en un nombre fini de cycles.*

Le résultat est juste sous la condition nécessaire que le vecteur $x(r) = (x_0(r), x_1(r), \ldots, x_{n+r}(r))$ soit entier pour un certain r. Pour cela, il suffit de démontrer l'intégrité du vecteur $(x_0(r), x_1(r), \ldots, x_n(r))$ parce que le théorème 7.7 implique dans ce cas la même propriété des nombres $x_{n+1}(r), x_{n+2}(r), \ldots, x_{n+r}(r)$. On rappelle que le plus petit indice s, $x_s(r)$ non entier, n'est jamais supérieur à n: $0 \leqslant s \leqslant n$. On démontre le théorème moyennant le

Lemme 7.9. *Il existe pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant n$, un numéro R_j tel que tous les nombres $x_j(r)$ soient pour $r \geqslant R_j$ des entiers et égaux à un même entier $x_j(R_j)$.*

Démonstration. Soit s, $0 \leqslant s \leqslant n$, le plus petit indice pour lequel le lemme n'est pas vérifié. On introduit la notation $R = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant s-1} R_j$. Si $s = 0$, on pose $R = 0$.

Soit r et l des indices tels que $R \leqslant r < l$ et $x_s(r)$, $x_s(l)$ soient non entiers. On montre que $[x_s(r)] > [x_s(l)]$. En effet, on a par définition de s:

$$\left.\begin{array}{l} x_j(r) \text{ entier,} \\ x_j(r) = x_j(r+q),\ q = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant s-1. \quad (7.35)$$

Aussi s est le plus petit indice pour lequel $x_s(r)$ est non entier. On a $[x_s(r)] \geqslant x_s(l)$ par la conséquence du lemme 7.8.

Le nombre $x_s(l)$ étant non entier, $x_s(l) > [x_s(l)]$, d'où le résultat cherché. L'ensemble X des programmes du problème (7.19) à

(7.21) est borné, si bien qu'il en est de même de toute quantité $x_s(r)$, $0 \leqslant s \leqslant n$, $r = 1, 2, \ldots$ Les inégalités $[x_s(r)] > [x_s(l)] > \ldots$ ne forment donc pas une chaîne infinie, et la suite $x_s(r)$, $r = 0, 1, \ldots$ ne peut comprendre une infinité de nombres non entiers. On démontre de façon analogue qu'elle ne contient pas non plus une infinité d'entiers distincts.

Revenons au théorème 7.10. Soit $R = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} R_j$, avec R_j du lemme 7.9. Par ce lemme, $x_j(R)$, $0 \leqslant j \leqslant n$, sont tous des entiers. Le vecteur $x(R)$ est donc entier (th. 7.7), i. e. l'algorithme de Gomory exige au plus R cycles.

5. En exploitant le premier algorithme de Gomory, on se heurte à ce problème sérieux qu'est la multiplication des contraintes qui fait grossir les tableaux simplexes. Gomory supprime cet inconvénient par l'artifice suivant.

1) Dans la méthode duale appliquée au problème $\mathcal{L}_r$, on utilise à chaque itération la règle 1* améliorée: si la première colonne du tableau simplicial a plusieurs éléments β_{i0} $(= x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots, n + r$, négatifs, on élimine de la base la variable affectée de plus petit indice.

2) Si toutes les variables principales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont non négatives à un pas, on arrête les itérations de la méthode duale même si l'on n'a pas atteint le maximum lexicographique du problème $\mathcal{L}_r$. Si toutes les variables x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ s'avèrent dans ce cas des nombres entiers, alors toutes les variables auxiliaires x_{n+k}, $k = 1, 2, \ldots, r$, sont entières et non négatives par le théorème 7.7. Cela signifie (on le connaît) que le vecteur $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est solution du problème entier de départ. Dans le cas contraire, on passe au cycle suivant.

3) On supprime la ligne associée à x_{n+r} dès que cette variable auxiliaire devient candidate à une sortie de la base. Cela a lieu, on se rappelle, à la première itération de la résolution du problème $\mathcal{L}_r$.

4) Si la variable x_{n+r} rentre dans la base à une itération ultérieure, la ligne correspondante n'est pas réintroduite dans le tableau.

On conçoit qu'avec les règles 3), 4), la dimension des tableaux simpliciaux du premier algorithme de Gomory reste invariante: chaque tableau renferme $n + 2$ lignes (relatives aux variables principales $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et à la variable secondaire courante x_{n+r} qu'on fait entrer dans la base) et $n - m + 1$ colonnes (vu que les variables hors base sont constamment $n - m$).

5) De toutes les variables secondaires à faire sortir de la base à la première itération de la résolution de $\mathcal{L}_{r+1}$, c'est x_{n+r+1} qu'on choisit bien que les variables restantes puissent également être négatives à cet instant.

Notons que la dernière règle est en fait superflue parce qu'aux étapes 3) et 4) on ignore les valeurs des variables $x_{n+1}, \ldots, x_{n+r}$ lorsqu'on passe à $\mathcal{L}_{r+1}$. Le seul but de 5) est de mettre en relief la différence entre les algorithmes considérés.

On note que la suite $x'(r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, formée par 2) diffère en général de la suite intervenant dans l'algorithme de Gomory décrit au n° 3. Notamment, chaque vecteur $x'(r)$ peut ne pas être le maximum lexicographique du problème $\mathcal{L}_r$ du moment que certaines variables secondaires sont négatives.

La suite $x'(r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, construite par les règles 1) et 2) conserve néanmoins la propriété importante d'être unique.

Il reste à prouver qu'avec 1) à 4), l'algorithme de Gomory reste fini, car cette propriété signifie bien qu'il donne une solution entière du problème (7.19) à (7.21). En effet, dire que le nombre R de cycles est fini, c'est dire que le vecteur $x'(R)$ est entier.

On commence par faire la remarque suivante: si l'on applique la règle 2) pour le problème $\mathcal{L}_r$, le nombre d'itérations est fini (il est au plus égal au nombre d'itérations nécessaires pour en trouver le maximum lexicographique).

THÉORÈME 7.11. *La suite $x'(r)$ issue de l'algorithme de Gomory soumis aux règles* 1) *à* 4) *est finie.*

DÉMONSTRATION. Lorsqu'on a démontré le caractère fini de la suite $x(r)$ (th. 7.10), on n'a utilisé que deux des circonstances qui gouvernent la génération de la suite. Ce sont le procédé de construction d'une coupe efficace et le fait que toutes les colonnes β^j, $j \in \omega$, de tout tableau courant sont lexicographiquement positives. Ainsi, la suppression de la ligne associée à une variable secondaire ne peut influer que sur la dernière propriété. Mais cela n'a pas lieu, à savoir on a le

LEMME 7.10. *Toute colonne*

$$\beta^j = (\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj}, \beta_{n+1,j}, \beta_{n+r,j}), \quad j \in \omega,$$

de tout tableau simplexe résultant de l'algorithme de Gomory décrit au n° 3 *vérifie l'inégalité*

$$(\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj}) \succ 0.$$

DÉMONSTRATION. On admet que le lemme est faux pour un $k \in \omega$. Comme $\beta^k \succ 0$, cette hypothèse signifie que

$$\beta_{ik} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{7.36}$$

Par définition du tableau simplicial sous forme lexicographique et vu la formule (6.21),

$$x - x^0 = -\sum_{j \in \omega} \beta^j x_j \tag{7.37}$$

quel que soit $x \in \mathbf{R}^{n+1+r}$ si l'affirmation ci-dessus n'est pas juste pour $\mathcal{L}_r$. La formule (7.37) jointe à (7.36) traduit le fait que la variation de la variable x_k n'induit pas celle de x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Autrement dit, x_k peut prendre des valeurs arbitraires pour un même ensemble de x_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Il en résulte que, *primo*, $k \geqslant n + 1$, et, *secundo*, l'hypothèse (7.36) est fausse du moment que la valeur de toute variable secondaire x_k, $k \geqslant n + 1$, est définie de façon unique par les valeurs des variables principales (cela découle de (7.30)).

L'élimination des lignes relatives aux variables secondaires n'influe pas sur la propriété des colonnes β^j, $j \in \omega$, d'être l-positives, si bien que ces lignes sont en général superflues. En effet, si l'on observe les règles 1) et 2), une fois introduite dans la base, la variable x_{n+r} y reste jusqu'à la fin des calculs, et on n'a pas besoin de la ligne associée pour définir la variable à faire entrer dans la base par la règle 2^{*l}.

Ainsi, les éléments de la ligne relative à x_{n+r} ne figurent pas dans les formules (6.29) de la méthode duale qui donnent toutes les variables restantes.

Il est déjà connu que l'indice s présidant à la formation d'une coupe efficace ne dépasse pas n: $0 \leqslant s \leqslant n$, si bien que les variables secondaires ne sont pas utiles ici non plus.

6. Voici un exemple de résolution numérique d'un problème de programmation linéaire en nombres entiers.

On se propose d'élaborer le modèle du crible d'Eratosthène (recherche des nombres premiers naturels).

Supposons connus les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$. On demande de trouver le nombre suivant p_{m+1}. On écrit ce problème sous forme d'un programme linéaire. On désigne par x le nombre cherché. Soit le problème

$$\max(-x)$$
$$x = k_i p_i + r_i, \quad 1 \leqslant r_i \leqslant p_{i-1}, \quad x \geqslant p_m,$$
$$x, k_i, r_i \text{ naturels}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Les contraintes signifient que le nombre naturel x est premier avec tous les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et est différent de 1. Il est clair que le plus petit nombre naturel ayant ces propriétés coïncide avec p_{m+1}.

On se place dans le cas où $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, le nombre cherché p_4 étant 7.

Ainsi, on a le problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$\max(-x)$$
$$x = 2k_1 + 1, \quad x = 3k_2 + r_2, \quad 1 \leqslant r_2 \leqslant 2,$$
$$x = 5k_3 + r_3, \quad 1 \leqslant r_3 \leqslant 4, \quad x \geqslant 5,$$
$$x, \quad k_1, \quad k_2, \quad r_2, \quad k_3, \quad r_3 \text{ naturels.}$$

		v_2	v_3	v_4			y_1	v_3	v_4		y_1	y_2	v_4			y_1	y_2	w_3		y_1	y_2	y_3
x_0	-5	0	0	1		-5	0	0	1	-5	0	0	1		$-\frac{21}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	-6	0	1	1
x	5	0	0	-1		5	0	0	-1	5	0	0	-1		$\frac{21}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	6	0	-1	-1
k_1	2	0	0	$-\frac{1}{2}$		2	0	0	$-\frac{1}{2}$	2	0	0	$-\frac{1}{2}$		$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
k_2	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$		1	1	0	-1	1	1	0	-1		$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2	1	-1	-1
r_2	1	-1	0	0		2	-3	0	2	2	-3	0	2		$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-3	2	2
k_3	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$		$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	-1		$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	-1
r_3	1	0	-1	0		1	0	-1	0	5	0	-5	4		4	0	0	1	1	0	-1	4
v_2	0	-1	0	0		1	-3	0	2	1	-3	0	2		$\frac{1}{2}$	-3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	-3*	2	2
w_2	1	1	0	0		0	3	0	-2	0	3	0	-2		$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	3	-2	-2
v_3	0	0	-1	0		0	0	-1	0	4	0	-5	4		3	0	0	1	0	0	-1	4
w_3	3	0	1	0		3	0	1	0	-1	0	5	-4*		0	0	0	-1	3	0	1	-4
v_4	0	0	0	-1		0	0	0	-1	0	0	0	-1		$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	-1	-1
y_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$*	0	$-\frac{2}{3}$	y_2	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$*	$-\frac{4}{5}$					y_3	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$*				

		v_2	y_2	y_3		v_2	y_2	y_4		v_2	r_3	y_4			v_2	v_3	y_4		v_2	y_5	y_4
x_0	-6	0	1	1	-7	0	0	2	-7	0	0	2		-7	0	0	2	-7	0	0	2
x	6	0	-1	-1	7	0	0	-2	7	0	0	-2		7	0	0	-2	7	0	0	-2
k_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	0	0	-1	3	0	0	-1		3	0	0	-1	3	0	0	-1
k_2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$		2	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$
r_2	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0		1	0	0	0	1	-1	0	0
k_3	1	0	0	-1	2	0	1	-2	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$		$\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	1	-1
r_3	1	0	-1	4	-3	0	-5*	8	0	0	-1	0		1	0	-1	0	2	0	-5	3
v_2	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0		0	-1	0	0	0	-1	0	0
w_2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0		1	1	0	0	1	1	0	0
v_3	0	0	-1	4	-4	0	-5	8	-1	0	-1*	0		0	0	-1	0	1	0	-5	3
w_3	3	0	1	-4	7	0	5	-8	4	0	1	0		3	0	1	0	2	0	5	-3
v_4	1	0	-1	-1	2	0	0	-2	2	0	0	-2		2	0	0	-2	2	0	0	-2
y_4	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$*									y^5	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$				

On introduit des variables supplémentaires et on ramène le problème à la forme canonique

$$\max(-x)$$
$$x = 2k_1 + 1, \quad x = 3k_2 + r_2, \quad x = 5k_3 + r_3,$$
$$r_2 - v_2 = 1, \quad r_3 + w_2 = 2, \quad r_3 - v_3 = 1,$$
$$r_3 + w_3 = 4, \quad x - v_4 = 5.$$

Le vecteur des variables $(x, k_1, k_2, r_2, k_3, r_3, v_2, w_2, v_3, w_3, v_4)$ est supposé entier non négatif.

On trouve facilement le maximum lexicographique du problème non soumis à la condition d'intégrité. C'est (5, 2, 4/3, 1, 4/5, 1, 0, 1, 0, 3, 0). Les variables hors base sont v_2, v_3, v_4.

On obtient le tableau simplicial correspondant en exprimant toutes les variables par les variables non dans la base:

$$x = 5 + v_4,$$
$$k_1 = 2 + \frac{1}{2}v_4, \quad k_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_4, \quad r_2 = 1 + v_2,$$
$$k_3 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}v_3 + \frac{1}{5}v_4, \quad r_3 = 1 + v_3,$$
$$w_2 = 1 - v_2, \quad w_3 = 3 - v_3.$$

On introduit la variable x_0 correspondant à la fonction économique ($x_0 = -x$), $x = -5 - v_4$. Les variables secondaires de Gomory seront notées $y_1, y_2, \ldots$. Les résultats des calculs sont donnés dans les tableaux pp. 217-218.

Solution: $x = 7$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $r_2 = 1$, $k_3 = 1$, $r_3 = 2$, $v_2 = 0$, $w_2 = 1$, $v_3 = 1$, $w_3 = 2$, $v_4 = 0$.

7. Dans le premier algorithme de Gomory, toutes les variables sont supposées entières. Or, il existe pas mal de problèmes pratiques dont toutes les variables ne possèdent pas cette propriété. L'algorithme de Gomory présente, de plus, l'inconvénient d'être sensible aux erreurs résultant du calcul des parties fractionnaires, de l'arrondîment, etc. On a élaboré plusieurs algorithmes dépourvus de ces défauts. Le lecteur peut prendre connaissance de quelques-uns de ces procédés de calcul en consultant [24].

§ 8. Décomposition des programmes linéaires

1. Il existe une classe de problèmes de programmation linéaire dont les contraintes constituent un ensemble de structure spéciale. Toutes les variables $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont partagées en plusieurs groupes:

$$x^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{r_1}),$$
$$x^2 = (x_{r_1+1}, x_{r_1+2}, \ldots, x_{r_2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^k = (x_{r_{k-1}+1}, x_{r_{k-1}+2}, \ldots, x_{r_k}),$$

avec $r_k = n$, tels qu'il y ait, à part des contraintes de forme générale $Ax \leqslant b$, des contraintes dont les variables appartiennent à un seul groupe: $A_h x^h \leqslant b^h$, $h = 1, 2, \ldots, k$.

C'est, par exemple, le cas du problème

$$\max (2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6)$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 - x_6 \leqslant 18,$$
$$3x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \leqslant 15,$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 5, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 1,$$
$$-x_4 + x_5 + 3x_6 \leqslant 8, \quad x_4 - 2x_5 + x_6 \leqslant 7,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Le groupe de contraintes globales (qui portent sur l'ensemble des variables) constitue un *bloc de liaison*. Schématiquement, les contraintes des problèmes ayant cette structure sont représentées par la figure 7.6. N'était-ce le bloc de liaison, le problème serait

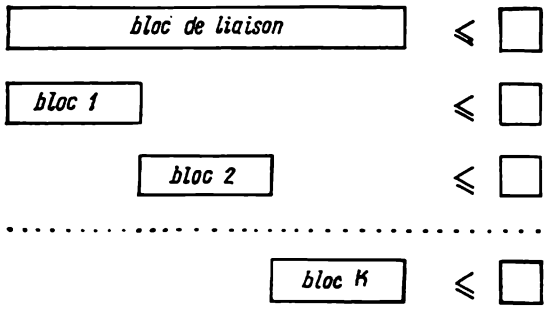


Fig. 7.6.

évidemment décomposé en k problèmes indépendants de dimension plus petite. Il est cependant possible, même quand ce bloc existe, d'utiliser les particularités de ce problème pour le ramener à plusieurs programmes linéaires de dimension égale à celle des blocs.

2. On décrit la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe. On désigne par $\tilde{A}$ la matrice bloc-diagonale

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

et par $\tilde{b}$ le vecteur second membre des contraintes $\tilde{b} = (b^1, b^2, \ldots, b^k)$.

On prend le problème de programmation linéaire sous forme standard

$$\max \langle c, x\rangle \qquad (7.38)$$
$$Ax \leqslant b, \quad \tilde{A}x \leqslant \tilde{b}, \quad x \geqslant 0,$$

et on suppose A de format $m \times n$ et $b \in \mathbf{R}^m$.

Comme précédemment on note X l'ensemble admissible du problème (7.38):

$$X = \{x \mid Ax \leqslant b, \quad \tilde{A}x \leqslant b, \quad x \geqslant 0\}.$$

Soit, en outre, les ensembles

$$X_A = \{x \mid Ax \leqslant b\}, \quad X_{\tilde{A}} = \{x \mid \tilde{A}x \leqslant \tilde{b}, \quad x \geqslant 0\}.$$

Evidemment, $X = X_A \cap X_{\tilde{A}}$.

Pour simplifier l'exposé, on se place dans le cas où $X_{\tilde{A}}$ est borné, i.e. c'est un polyèdre convexe. Cette hypothèse est manifestement vérifiée si et seulement si chaque système $A_h x^h \leqslant b^h$, $x^h \geqslant 0$, $h = 1, 2, \ldots, k$, définit un ensemble borné.

Soient $s^1, s^2, \ldots, s^N$ les points extrêmes du polyèdre $X_{\tilde{A}}$. Selon le théorème 2.13, le polyèdre $X_{\tilde{A}}$ est égal à l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrêmes:

$$X_{\tilde{A}} = \{x \mid x = \sum_{j=1}^{N} y_j s^j, \ \sum_{j=1}^{N} y_j = 1, \ y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Comme $X = X_A \cap X_{\tilde{A}}$, le point $x = \sum_{j=1}^{N} y_j s^j$ est élément de X si et seulement si $\sum_{j=1}^{N} y_j = 1$, $y_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, et x vérifie les contraintes donnant X_A:

$$Ax = \sum_{j=1}^{N} y_j A s^j \leqslant b.$$

La valeur que la fonction économique prend sur le vecteur x s'exprime moyennant s^j, $j = 1, 2, \ldots, N$: $\langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{N} y_j \langle c, s^j\rangle$. On

introduit les notations

$$\gamma_j = \langle c, s^j \rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N),$$
$$Q^j = As^j, \; j = 1, 2, \ldots, N, \; y = (y_1, y_2, \ldots, y_N).$$

Ici γ_j est un nombre et Q^j un vecteur à m composantes.

Le problème proposé (7.38) est équivalent au programme linéaire

$$\max \langle \gamma, y \rangle$$
$$\sum_{j=1}^{N} Q^j y_j \leqslant b, \quad \sum_{j=1}^{N} y_j = 1, \; y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.39}$$

Il correspond à chaque solution $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_N^*)$ de (7.39) une solution $x^* = \sum_{j=1}^{N} y_j^* s^j$ du problème (7.38). Le problème (7.39) s'appelle maître-programme.

La réduction décrite du problème originel au maître-programme paraît de prime abord inutile. En effet, on formule (7.39) à condition de définir tous les points extrêmes s^j, $j = 1, 2, \ldots, N$, du polyèdre $X_A^{\sim}$. Or, le nombre N peut être très élevé, si bien qu'il s'agit là d'une opération laborieuse. Mais si l'on construit le maître-programme, c'est justement parce qu'on le résout connaissant au départ un seul point extrême de $X_A^{\sim}$.

On introduit dans (7.39) autant de variables d'écart y_{N+1}, $y_{N+2}, \ldots, y_{N+m}$ qu'il y a de contraintes de type inégalités, il vient le programme canonique

$$\max \langle \gamma, y \rangle$$
$$\sum_{j=1}^{N} Q^j y_j + \sum_{i=1}^{N} e^i y_{N+i} = b, \quad \sum_{j=1}^{N} y_j = 1,$$
$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N+m,$$

avec e^i le i-ième vecteur unité de l'espace $\mathbf{R}^m$.

On allège l'écriture en introduisant les notations:

$$\bar{Q}^j = \begin{pmatrix} Q^j \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1 \; 2, \ldots, N,$$

$$\bar{Q}^j = \begin{pmatrix} e^{j-N} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = N+1, N+2, \ldots, N+m,$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{N+m},$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{N+m}).$$

Le maître-programme sous forme canonique s'écrit

$$\max \langle \bar{\gamma}, \bar{y} \rangle$$
$$\sum_{j=1}^{N+m} \bar{Q}^j y_j = \bar{b}, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N+m. \tag{7.40}$$

On suppose connus le programme de base initial $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{N+m}^0)$ pour (7.40) et la base associée $\{\bar{Q}^{i_1}, \bar{Q}^{i_2}, \ldots, \bar{Q}^{i_{m+1}}\}$. On utilise la méthode simpliciale révisée (voir § 6, ch. V).

On note

$$\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}\}, \; A_\sigma = (\bar{Q}^{i_1}, \bar{Q}^{i_2}, \ldots, \bar{Q}^{i_{m+1}}),$$
$$\bar{\gamma}_\sigma = (\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_{m+1}}), \; \bar{y}_\sigma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{m+1}}).$$

Dans la méthode révisée du simplexe, on vérifie en premier lieu si y^0 est un programme optimal. On calcule le vecteur

$$\bar{p}^0 = (A_\sigma^{-1})' \bar{\gamma}_\sigma$$

et les quantités

$$\Delta_j = \langle \bar{Q}^j, \bar{p}^0 \rangle - \bar{\gamma}_j, \quad j \notin \sigma$$

(voir (5.41), (5.42)). On introduit les notations

$$\bar{p}^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0, p_{m+1}^0), \; p^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0).$$

La dernière coordonnée de chaque vecteur $\bar{Q}^j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, étant 1, on a

$$\Delta_j = \langle Q^j, p^0 \rangle + p_{m+1}^0 - \gamma_j, \; j \notin \sigma, \; 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{7.41}$$

Si $j \geqslant N$, on a $\Delta_{N+i} = \langle Q^{N+i}, p^0 \rangle - \gamma_{N+i} = p_i^0$ parce que $\gamma_{N+i} = 0$, $Q^{N+i} = e^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ainsi, on connaît les valeurs de Δ_j pour $j \geqslant N$. D'autre part, on ne trouve pas directement Δ_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, par les formules (7.41) car on ne connaît pas les vecteurs Q^j, $j \notin \sigma$.

On porte dans (7.41) Q^j et γ_j en fonction de s^j:

$$\Delta_j = \langle As^j, p^0 \rangle - \langle c, s^j \rangle + p_{m+1}^0 = \langle A'p^0 - c, s^j \rangle + p_{m+1}^0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

On vérifie si certains Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, sont négatifs. Il suffit de prendre l'indice t, $1 \leqslant t \leqslant N$, pour lequel $\langle A'p^0 - c, s^t \rangle$ est le plus petit de tous les nombres $\langle A'p^0 - c, s^j \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant N$, et d'examiner Δ_t. Si $\Delta_t \geqslant 0$ et $\Delta_{N+i} \geqslant 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$, alors y^0 est un programme optimal. On choisit t convenable si l'on résout le problème

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant N} \langle A'p^0 - c, s^j \rangle. \tag{7.42}$$

Du moment que le minimum de la fonction linéaire $\langle A'p^0 - c, x\rangle$ sur le polyèdre $X_{\widetilde{A}}$ coïncide avec son minimum réalisé sur l'ensemble des points extrêmes, on remplace (7.42) par le programme linéaire

$$\begin{aligned} &\min \langle A'p^0 - c, x\rangle \\ &\widetilde{A}x \leqslant \widetilde{b},\ x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{7.43}$$

La matrice $\widetilde{A}$ est bloc-diagonale, si bien que (7.43) est décomposé en k problèmes de moindre taille. Si l'on désigne par q^h le vecteur formé de coordonnées de numéros $r_{h-1} + 1, r_{h-1} + 2, \ldots, r_h$ du vecteur $A'p^0 - c$, (7.43) se ramène à k problèmes

$$\begin{aligned} &\min \langle q^h, x^h\rangle \\ &A_h x^h \leqslant b^h,\ x^h \geqslant 0, \end{aligned} \tag{7.44}$$

$h = 1, 2, \ldots, k$.

Si x^{*h} est solution du problème (7.44), alors le vecteur $x^* = (x^{*1}, x^{*2}, \ldots, x^{*h})$ en est évidemment une de (7.43). Soit x^* un programme de base optimal du problème (7.43), qui coïncide avec un point extrême du polyèdre $X_{\widetilde{A}}$. On note $\overline{Q} = \begin{pmatrix} Ax^* \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overline{Q}$ est l'un des $\overline{Q}^j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Si $\overline{\Delta} = \langle A'p^0 - c, x^*\rangle + p^0_{m+1} \geqslant 0$, alors $\overline{\Delta}_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots N$.

Avec ce procédé, on vérifie si y^0 est optimal et on définit, en cas de réponse négative, le vecteur $\overline{Q}$ (ou l'un des vecteurs $\overline{Q}^{N+i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$) à introduire dans la base par la règle 1 de la méthode du simplexe.

On cherche le candidat à une sortie de la base par la procédure usuelle de la méthode simpliciale sous forme révisée qui exige au départ la connaissance des seuls vecteurs $A_\sigma^{-1}\overline{Q}$ et $A_\sigma^{-1}y^0_\sigma$. Ensuite, on passe à la nouvelle base par la formule (5.28).

3. Il reste à préciser la façon dont on trouve le programme de base initial y^0 pour le problème (7.39) ou, ce qui revient au même, pour (7.40). Le dernier problème est à $m + 1$ contraintes (plus la condition de non-négativité des variables), si bien que la base relative à un programme de base doit comprendre $m + 1$ vecteurs (sous l'hypothèse que le rang de la matrice des contraintes est égal au nombre d'équations). On voit aisément qu'il suffit, pour trouver le programme de base initial, de connaître un seul point extrême du polyèdre $X_{\widetilde{A}}$. En effet, soit s^1 un point extrême de $X_{\widetilde{A}}$, auquel cas on prend comme base de (7.40) la base $\{\overline{Q}^1, \overline{Q}^{N+1}, \overline{Q}^{N+2}, \ldots$

$\ldots, \bar{Q}^{N+m}\}$, où $\bar{Q}^1 = \begin{pmatrix} As^1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le programme associé est $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{N+m}^0)$, où

$$y_1^0 = 1, \; y_j^0 = 0, \text{ pour } 2 \leqslant j \leqslant N,$$
$$y_{N+i}^0 = b_i - (As^1)_i, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

On définit sans peine un point extrême s^1 de $X_A^{\sim}$. En effet, si $\bar{x}^h$ est un point extrême du polyèdre $\{x \mid A_h x^h \leqslant b^h, \; x^h \geqslant 0\}$, alors $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^k)$ en est un de $X_A^{\sim}$. On trouve donc $\bar{x}$ $(=s^1)$ en appliquant aux problèmes (7.44) le procédé de recherche d'un programme de base initial du chapitre V.

CHAPITRE VIII

MÉTHODE DE RÉGULARISATION DES PROBLÈMES INSTABLES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

§ 1. Notion de stabilité des programmes linéaires

Une des difficultés de la résolution numérique d'un programme linéaire de la forme

$$\begin{gathered} \max \langle c, x \rangle \\ Ax \leqslant b \end{gathered} \tag{8.1}$$

tient à ce que les calculateurs électroniques ne travaillent que sur les valeurs approchées des paramètres qu'on arrondit au cours des calculs. On remplace, en fait, (8.1) par un problème

$$\begin{gathered} \max \langle c(\delta), x \rangle \\ A(\delta)\, x \leqslant b(\delta), \end{gathered} \tag{8.2}$$

où l'on ne sait rien sur la matrice $A(\delta)$ et les vecteurs $b(\delta)$, $c(\delta)$ si ce n'est qu'ils avoisinent dans une certaine mesure les valeurs réelles respectives de A, b, c.

Pour se faire une idée plus nette de la proximité des matrices et de celle des vecteurs, on utilise la métrique euclidienne usuelle. On appelle distance de deux matrices $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ et $A = (a_{ij})$ de dimension $m \times n$ le nombre

$$\| A - \bar{A} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \bar{a}_{ij})^2}.$$

On a de même pour $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$

$$\| b - \bar{b} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b_i - \bar{b}_i)^2}.$$

Si l'on fixe une matrice A et des vecteurs b et c, alors le symbole $A(\delta)$ signifie pour tout $\delta > 0$ que $A(\delta)$ est une matrice dans le δ-voisinage de A, i.e.

$$\| A(\delta) - A \| < \delta. \tag{8.3}$$

De même, $b(\delta)$ et $c(\delta)$ sont des vecteurs tels qu'on ait

$$\| b(\delta) - b \| < \delta, \tag{8.4}$$

$$\| c(\delta) - c \| < \delta. \tag{8.5}$$

Un problème de la forme (8.2) avec les conditions (8.3) à (8.5) s'appelle le *problème perturbé* contenu dans le δ-voisinage du problème (8.1).

Soient X^0 l'ensemble des solutions de (8.1), d sa valeur et $X^0(\delta)$, $d(\delta)$ leurs homologues pour le problème perturbé. La première question qui se pose lorsqu'on compare les deux problèmes concerne l'existence pour le problème perturbé.

DÉFINITION 8.1. Le problème (8.1) est dit *stable* s'il existe un nombre $\delta_0 > 0$ tel que le problème (8.2) soit possible pour tout δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$. Autrement dit, le problème (8.1) est stable s'il est possible ainsi que tout problème qui en provient par de petites variations des paramètres.

On suppose (8.1) stable et $\delta > 0$ tel que le problème perturbé ait une solution $x^*(\delta) \in X^0(\delta)$. On se demande si

1) la grandeur $d(\delta)$ de la valeur du problème (8.2) est proche du nombre d,

2) si le vecteur $x^*(\delta)$ est proche de l'ensemble X^0.

DÉFINITION 8.2. Le problème (8.1) est *stable par rapport à la fonctionnelle* si

a) il est stable,

b) on trouve pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel qu'avec les conditions (8.3) à (8.5) on ait $|d(\delta) - d| < \varepsilon$.

Autrement dit, la valeur de (8.1) en tant que fonction $d(A, b, c)$ des paramètres du problème est continue.

DÉFINITION 8.3. Le problème (8.1) est *stable par rapport à la solution* si

a) il est stable,

b) on trouve pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que si l'on est dans les conditions (8.3) à (8.5), il existe pour chaque $x^*(\delta) \in X^0(\delta)$ un vecteur $x^* \in X^0$ respectant l'inégalité $\| x^*(\delta) - x^* \| < \varepsilon$.

Si le problème (8.1) est instable au sens d'au moins une des définitions 8.1 à 8.3, sa résolution sur machine risque visiblement d'aboutir à des résultats fort éloignés des valeurs réelles.

Voici un autre problème soulevé par la notion d'un programme linéaire stable. Lorsqu'on étudie un phénomène réel sur des modèles mathématiques, leurs paramètres fournis par la statistique ou l'expérience ne sont des fois connus qu'approximativement, avec un certain degré de précision. Si l'on prend donc un modèle de la forme (8.1), la seule chose à dire est que le modèle adéquat du phénomène est décrit par un problème (8.2). Ainsi, la relation entre les deux problèmes requiert un intérêt pratique immédiat.

On se propose maintenant d'établir des critères de stabilité et de donner des méthodes de résolution si la stabilité n'a pas lieu.

§ 2. Systèmes paramétriques d'inéquations linéaires

Soit un système quelconque d'inéquations linéaires

$$Ax \leqslant b. \tag{8.6}$$

On désigne par K le cône polyédrique $K = \mathrm{Co}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^n$ engendré par les vecteurs-colonnes de la matrice A (dont il est donc l'enveloppe conique).

THÉORÈME 8.1. *Si l'ensemble X des solutions du système* (8.6) *n'est pas vide, alors X est borné si et seulement si $K = \mathbf{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $K = \mathbf{R}^n$, auquel cas il correspond à tout vecteur unité e^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, un vecteur p^j non négatif tel que $e^j = A'p^j$. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, alors

$$x_j = \langle e^j, x\rangle = \langle A'p^j, x\rangle = \langle p^j, Ax\rangle.$$

La non-négativité de p^j et l'inéquation (8.6) donnent $\langle p^j, Ax\rangle \leqslant \langle p^j, b\rangle$, d'où $x_j \leqslant \langle p^j, b\rangle$.

On introduit la notation $M = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \langle p^j, b\rangle$, il vient $x_j \leqslant M$, $j = 1, 2, \ldots, n$. On trouve de façon analogue $x_j \geqslant \overline{M}$ du moment que $-e^j \in K$. Ainsi, on a pour tout $x \in X$: $\overline{M} \leqslant x_j \leqslant M$, $j = 1, 2, \ldots, n$, si bien que l'ensemble X est borné.

Inversement, on suppose que X est borné et non vide, i.e. il existe des constantes M et $\overline{M}$ pour lesquelles $\langle e^j, x\rangle \leqslant M$, $\langle -e^j, x\rangle \leqslant \overline{M}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ont lieu pour tout $x \in X$. Cela veut dire que chaque inégalité est une conséquence du système (8.6). Il en résulte, par le théorème 2.27, l'existence des vecteurs $p^j \geqslant 0$, $q^j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, qui vérifient $A'p^j = e^j$, $A'q^j = -e^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, i.e. le cône K est égal à $\mathbf{R}^n$ tout entier, ce qui achève la démonstration du théorème.

Par définition d'un cône, tout vecteur $c \in \mathbf{R}^n$ est pour $K = \mathbf{R}^n$ une combinaison linéaire non négative de lignes de la matrice A. Le lemme ci-dessus affine ce résultat (il affirme que les coefficients de la combinaison linéaire peuvent être tous positifs).

LEMME 8.1. *Si le cône K est égal à l'espace $\mathbf{R}^n$ tout entier, il existe pour tout $c \in \mathbf{R}^n$ un vecteur $p > 0$ tel que $A'p = c$.*

DÉMONSTRATION. On commence par montrer l'existence de $\overline{p} > 0$ pour lequel $A\overline{p} = 0$. Agissons par l'absurde. Dans ce cas, on trouve un vecteur $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ ayant la propriété $A\overline{x} \geqslant 0$, $A\overline{x} \neq 0$ (th. 2.30).

Il existe pour $\bar{x}$ un vecteur $q \geqslant 0$ tel que $-\bar{x} = A'q$ (car $K = \mathbf{R}^n$). On multiplie scalairement par $\bar{x}$, il vient $-\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle A'q, \bar{x} \rangle = \langle q, A\bar{x} \rangle \geqslant 0$, d'où $\bar{x} = 0$: contradiction avec l'hypothèse $A\bar{x} \neq 0$. Soit $c \in \mathbf{R}^n$ quelconque et $A'p = c$. On a $A'(p + \bar{p}) = c$ et $p + \bar{p} > 0$. Le lemme se trouve démontré.

Procédons comme dans le § 1 et écrivons pour le système d'inéquations linéaires (8.6) le système perturbé

$$A(\delta)\, x \leqslant b(\delta), \tag{8.7}$$

avec $A(\delta)$ et $b(\delta)$ satisfaisant à (8.3) et (8.4).

Notre exposé ultérieur utilisera certaines notions d'Algèbre linéaire que nous avons méconnues jusqu'à présent.

LEMME 8.2. *Si les éléments b_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, d'une matrice $B = (b_{ij})$ carrée d'ordre n sont de module suffisamment petit, alors la matrice $I - B$ est non dégénérée. (Ici I est une matrice unité d'ordre n.)*

DÉMONSTRATION. On montre la non-dégénérescence de $I - B$ pour $|b_{ij}| < 1/n$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. On suppose le contraire, auquel cas il existe un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ non nul tel que $(I - B)\, x = 0$, et on estime que $\sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1$. Alors $x = Bx$ ou $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Avec les propriétés de la valeur absolue d'un nombre, on a $|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|\, |x_j|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. On somme les deux membres par rapport à i, il vient

$$1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|\Big) |x_j| < \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1:$$

contradiction qui démontre le lemme.

LEMME 8.3. *Soit A une matrice de dimension $m \times n$ $(m \geqslant n)$ et de rang n*, i.e. *ses colonnes a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, sont linéairement indépendantes. La matrice $A'A$ est non dégénérée.*

DÉMONSTRATION. On note que $A'A$ est à n lignes et n colonnes. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $A'Ax = 0$. On multiplie scalairement par x, il vient $0 = \langle A'Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle$, d'où $Ax = 0$. Comme

$$0 = Ax = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_n a^n$$

et les colonnes de A sont linéairement indépendantes, on a $x_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. L'égalité $A'Ax = 0$ entraîne donc $x = 0$, i.e. $A'A$ est une matrice non dégénérée.

LEMME 8.4. *Si les éléments d_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, d'une matrice $D = (d_{ij})$ sont suffisamment petits en valeur absolue et la matrice A à m lignes et n colonnes est de rang n, alors $A'(A - D)$ est une matrice non dégénérée.*

DÉMONSTRATION. On a $A'(A - D) = A'A - A'D$, si bien que $A'(A - D) = A'A(I - (A'A)^{-1}A'D)$ (on utilise la propriété de $A'A$ de posséder l'inverse (lemme 8.3)). La matrice $(A'A)^{-1}A'$ est fixée, et on obtient donc à l'aide de D la matrice $B = (A'A)^{-1}A'D$ à éléments aussi petits qu'on le veut en valeur absolue. Selon le lemme 8.2, la matrice $I - B$ est non dégénérée, auquel cas il en est également de même de $A'(A - D)$ en tant que produit de deux matrices non dégénérées $A'A$ et $I - B$.

Le lemme suivant sert d'outil principal dans l'étude des propriétés de la famille d'inéquations linéaires (8.7).

LEMME 8.5. *Soit donnés une matrice A de dimension $m \times n$ de rang n et un vecteur $p \in \mathbf{R}^m$ tel que $p > 0$ et $A'p = g$, g étant un vecteur fixé de l'espace $\mathbf{R}^n$. On trouve pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta_0 > 0$ tel qu'il existe pour chaque δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ un vecteur $p(\delta)$ respectant les conditions*

$$A'(\delta)\, p(\delta) = g, \tag{8.8}$$

$$p(\delta) > 0, \tag{8.9}$$

$$\| p(\delta) - p \| < \varepsilon. \tag{8.10}$$

DÉMONSTRATION. On cherche un vecteur $p(\delta)$ tel que

$$p(\delta) = p + Ax(\delta), \quad \text{avec} \quad x(\delta) \in \mathbf{R}^n,$$

auquel cas

$$g = A'(\delta)\, p(\delta) = A'(\delta)\, p + A'(\delta)\, Ax(\delta). \tag{8.11}$$

On introduit la notation $A - A(\delta) = D$, i.e. $\| D \| < \delta$. Si δ est suffisamment petit, alors la matrice $A'A(\delta) = A'(A - D)$ est non dégénérée (lemme 8.4), L'égalité (8.11) entraîne pour ces δ

$$(A'(\delta)\, A)^{-1}g - (A'(\delta)\, A)^{-1}A'(\delta)\, p = x(\delta) \tag{8.12}$$

($A'(\delta)\, A = (AA'(\delta))'$ étant non dégénérée).

Les éléments d'une matrice inverse sont une fonction continue de ceux de la matrice proposée, si bien que

$$\lim_{\delta \to 0} (A'(\delta)\, A)^{-1} = (A'A)^{-1}.$$

Il y a donc la limite

$$\lim_{\delta \to 0} x(\delta) = (A'A)^{-1} g - (A'A)^{-1} A'p = 0$$

vu que $A'p = g$. On en tire l'existence de

$$\lim_{\delta \to 0} (p(\delta) - p) = \lim_{\delta \to 0} Ax(\delta) = 0.$$

Ainsi, le vecteur $p(\delta) = p + Ax(\delta)$, avec $x(\delta)$ défini par (8.12), remplit la condition (8.8). Si $\delta_0 > 0$ est suffisamment petit, l'inégalité (8.10) est vérifiée pour tout δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, parce que $\lim_{\delta \to 0} p(\delta) = p$. Etant donné $p > 0$, il en est de même de (8.9) pour δ_0 suffisamment petit.

THÉORÈME 8.2. *Si l'ensemble X des solutions du système d'inéquations* (8.6) *est non vide et borné, alors il existe un nombre $\delta_0 > 0$ tel que tous les $X(\delta)$ sont pour tout δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, bornés dans leur ensemble (encore qu'il en existe peut-être qui sont égaux à l'ensemble vide).*

DÉMONSTRATION. Le théorème 8.1 et le lemme 8.1 impliquent l'existence des vecteurs $p^j > 0$, $q^j > 0$, tels que $A'p^j = e^j$, $A'q^j = -e^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. On déduit de plus du théorème 8.1 que la matrice A est de rang n. Le lemme 8.5 fait qu'il correspond à tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, on trouve des vecteurs $p^j(\delta) > 0$, $q^j(\delta) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, satisfaisant à

$$A'(\delta)\, p^j(\delta) = e^j, \tag{8.13}$$

$$A'(\delta)\, q^j(\delta) = -e^j, \tag{8.14}$$

$$\| p^j(\delta) - p^j \| < \varepsilon, \tag{8.15}$$

$$\| q^j(\delta) - q^j \| < \varepsilon, \tag{8.16}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ élément de l'un des ensembles $X(\delta)$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$. On multiplie (8.13) scalairement par x, il vient

$$x_j = \langle x, e^j \rangle = \langle x, A'(\delta) p^j(\delta) \rangle =$$
$$= \langle A(\delta)\, x, p^j(\delta) \rangle \leqslant \langle b(\delta), p^j(\delta) \rangle.$$

On désigne par Q le δ_0-voisinage du vecteur b: $Q = \{y \mid y \in \mathbf{R}^m, \| y - b \| \leqslant \delta_0\}$ et on pose $S^j = \{s \mid s \in \mathbf{R}^m, \| s - p^j \| \leqslant \varepsilon\}$. Evidemment, Q et S^j sont des compacts et $b(\delta) \in Q$; $p^j(\delta) \in S^j$. Soit

$$M^j = \max_{\substack{y \in Q \\ s \in S^j}} \langle y, s \rangle,$$

auquel cas $x_j \in M^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Avec (8.14) et (8.16), on trouve de même le minorant $\overline{M}^j$ des coordonnées x_j du vecteur $x \in X(\delta)$. Les nombres M^j, $\overline{M}^j$ étant indépendants de δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, on trouve le résultat voulu.

§ 3. Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des problèmes de programmation linéaire

Dans ce paragraphe, l'auteur se propose de montrer l'équivalence des trois définitions d'un programme linéaire stable (voir § 1) et d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème (8.1) présente ces propriétés.

Les résultats du § 2 permettent de parler du caractère tout particulier du cas où la matrice des contraintes A est de rang n (les colonnes de A étant au nombre n).

DÉFINITION 8.4. Un cône $K = \mathrm{Co}\,(a_1, a_2 \ldots, a_m) \subseteq \mathbf{R}^n$ engendré par les vecteurs-lignes de la matrice A est dit *solide* si la matrice A à n colonnes est de rang n.

DÉFINITION 8.5. Un vecteur $c \in \mathbf{R}^n$ est *intérieur* au cône K s'il existe un vecteur $p \in \mathbf{R}^m$ tel que $p > 0$, $A'p = c$.

La position relative du vecteur c et du cône K joue un rôle important dans l'étude de la stabilité du problème (8.1).

DÉFINITION 8.6. On dit que le couple (K, c) est *en position générale* si le cône polyédrique K est solide et c en est un point intérieur.

On établit la relation entre K et c, d'une part, et le cône polyédrique $K^c = \mathrm{Co}\,(-c, K) \subseteq \mathbf{R}^n$, de l'autre.

LEMME 8.6. *Le couple (K, c) est en position générale si et seulement si $K^c = \mathbf{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $K^c = \mathbf{R}^n$. Il existe, par le lemme 8.1, un nombre $\alpha > 0$ et un vecteur $p > 0$ tels que $c = -\alpha c + A'p$, d'où $c = A'\bar{p}$, avec $\bar{p} = p/(1 + \alpha) > 0$. Ainsi, c est un point intérieur de K. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ un vecteur quelconque. Etant donné $K^c = \mathbf{R}^n$, on constate l'existence d'un nombre non négatif $\alpha\,(x) \geqslant 0$ et d'un vecteur non négatif $p\,(x) \geqslant 0$ pour lesquels on a $x = -\alpha\,(x)\,c + A'p\,(x)$. On y porte c exprimé par les générateurs de K:

$$x = -\alpha\,(x)\,A'\bar{p} + A'p\,(x) = A'\,(-\alpha\,(x)\,\bar{p} + p\,(x)),$$

i.e. x quelconque de $\mathbf{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs-lignes de la matrice A. On en déduit que A est de rang n, i.e. K est un cône solide.

On démontre l'affirmation dans l'autre sens. Soit K un cône solide et c son point intérieur, i.e. il existe un vecteur $p > 0$ tel que $A'p = c$. On suppose que $K^c \neq \mathbf{R}^n$, auquel cas le cône polyédrique K^c admet un hyperplan d'appui, i.e. il existe un vecteur $\bar{x}$ vérifiant les conditions $\bar{x} \neq 0$, $\langle \bar{x}, x \rangle \leqslant 0$ pour chaque $x \in K^c$. En particulier, $\langle \bar{x}, -c \rangle \leqslant 0$, $\langle \bar{x}, a_i \rangle \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, i.e. $\langle \bar{x}, c \rangle \geqslant 0$ et

$A\bar{x} \leqslant 0$. Le vecteur $A\bar{x} = \bar{x}_1 a^1 + \bar{x}_2 a^2 + \ldots + \bar{x}_n a^n \neq 0$ car il y a indépendance linéaire des colonnes de A. Par conséquent, au moins une coordonnée de $A\bar{x}$ est strictement inférieure à 0. Compte tenu de $p > 0$, on a

$$0 > \langle p, A\bar{x}\rangle = \langle A'p, \bar{x}\rangle = \langle c, \bar{x}\rangle \geqslant 0,$$

contradiction qui achève la démonstration.

LEMME 8.7. *Si le cône polyédrique* $C = \mathrm{Co}\,(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ *coïncide avec l'espace* $\mathbf{R}^n$, *alors on trouve un nombre* $\delta_0 > 0$ *tel que le cône perturbé* $C(\delta) = \mathrm{Co}\,(g_1(\delta), g_2(\delta), \ldots, g_r(\delta))$ *soit égal à* $\mathbf{R}^n$ *pour tout* δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$.

DÉMONSTRATION. On suppose que l'affirmation est fausse. Soit $\{\delta_k\}$ une suite telle que $\delta_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$ et chaque cône $C(\delta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, ne soit pas égal à $\mathbf{R}^n$. Dans ce cas, il existe un hyperplan d'appui à chaque $C(\delta_k)$, i.e. un vecteur y^k, $\|y^k\| = 1$, ayant la propriété « $\langle y, x\rangle \leqslant 0$ pour tous les $x \in C(\delta_k)$ ». En particulier,

$$\langle y^k, g_i(\delta_k)\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{8.17}$$

Les vecteurs y^k, $k = 1, 2, \ldots$, étant bornés pour la norme, la suite $\{y^k\}$ est considérée comme convergente vers un y^0:

$$\lim_{k\to\infty} y^k = y^0, \quad \|y^0\| = 1,$$

i.e. $y^0 \neq 0$.

Avec nos notations, le symbole $g_i(\delta)$ signifie que $\lim\limits_{\delta\to 0} g_i(\delta) = g_i$. On passe dans (8.17) à la limite quand $k \to \infty$, il vient $\langle y^0, g_i\rangle \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Il en résulte $\langle y^0, x\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in C$, et $y^0 \neq 0$, ce qui est d'ailleurs impossible du moment que $C = \mathbf{R}^n$.

Le dual de (8.1) s'écrit

$$\begin{aligned} &\min \langle b, p\rangle \\ &A'p = c, \quad p \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Prenons le cône

$K^{\mathrm{D}} = \mathrm{Co}\,(a^1, a^2, \ldots, a^n, -a^1, -a^2, \ldots, -a^n, v^1, v^2, \ldots, v^m)$

avec a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, la j-ième colonne de la matrice A et v^i le i-ième vecteur unité de l'espace $\mathbf{R}^m$.

Le problème (8.1) a évidemment un sens si et seulement si $b \in K^{\mathrm{D}}$, et une condition nécessaire et suffisante analogue pour le dual (8.18) est $c \in K$.

THÉORÈME 8.3. *Le problème* (8.1) *est stable au sens de la définition* 8.1 *si et seulement si le couple* (K, c) *et le couple* (K^{D}, b) *sont en position générale.*

DÉMONSTRATION. On fait l'hypothèse de (8.1) stable. On montre que dans ce cas les deux ensembles respectifs X^0 et P^0 du primal et du dual sont bornés.

Soit, par exemple, X^0 non borné. Il résulte du chapitre II que cet ensemble contient une demi-droite de la forme $x^0 + \lambda s$, $\lambda \geqslant 0$, avec s une direction, $s \neq 0$, $\langle c, s\rangle = 0$. Soit $\bar{c} \in \mathbf{R}^n$ tout vecteur tel que $\|\bar{c}\| = 1$, $\langle \bar{c}, s\rangle > 0$. Prenons le problème perturbé (8.2), où $A(\delta) = A$, $b(\delta) = b$, $c(\delta) = c + \delta\bar{c}$. Alors le vecteur $x(\lambda) = x^0 + \lambda s$ est élément de $X^0 \subseteq X$ quel que soit $\lambda > 0$, mais la fonction économique $\langle c(\delta), x(\lambda)\rangle = \langle c(\delta), x^0\rangle + \lambda\delta\langle \bar{c}, s\rangle$ croît indéfiniment pour tout $\delta > 0$ fixe avec λ tendant vers ∞, i.e. le problème (8.2) est impossible.

Ainsi, la condition de X^0 borné est nécessaire pour que le problème (8.1) soit stable. On utilise l'égalité des valeurs d'un primal et du dual et on démontre de façon analogue la même propriété de P^0.

L'ensemble X^0 peut être défini par le système d'inéquations linéaires $\langle -c, x\rangle \leqslant -d$, $Ax \leqslant b$, d étant la valeur du problème, si bien que la borne de X^0 et le théorème 8.1 entraînent $K^c = \mathbf{R}^n$. Le lemme 8.6 dit que (K, c) est dans ce cas en position générale.

L'ensemble P^0 est de même défini par le système $\langle b, p\rangle \leqslant d$, $A'p \leqslant c$, $-A'p \leqslant -c$, $-p \leqslant 0$. La propriété de borne de P^0 et le théorème 8.1 impliquent $\mathrm{Co}(-K^{\mathrm{D}}, b) = \mathbf{R}^m$, auquel cas $\mathrm{Co}(K^{\mathrm{D}}, -b) = \mathbf{R}^m$.

Le couple (K^{D}, b) est en position générale par le lemme 8.6.

Inversement, on suppose que (K^{D}, b) et (K, c) sont les deux en position générale.

Les cônes $\mathrm{Co}(-c, K)$ et $\mathrm{Co}(-b, K^{\mathrm{D}})$ coïncident avec $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement (lemme 8.6), auquel cas il en est de même des cônes $\mathrm{Co}(-c(\delta), K(\delta))$ et $\mathrm{Co}(-b(\delta), K^{\mathrm{D}}(\delta))$ associés au problème perturbé (8.2) pour tout δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, et des espaces $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ (lemme 8.7). On en déduit moyennant le lemme 8.6 que le couple $(K(\delta), c(\delta))$ est en position générale, ainsi que $(K^{\mathrm{D}}(\delta), b(\delta))$. Cela signifie, en particulier, que $c(\delta) \in K(\delta)$ et $b(\delta) \in K^{\mathrm{D}}(\delta)$. Selon la remarque ci-dessus, le problème (8.1) et son dual ont un sens pour tout δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, et admettent donc les deux une solution.

THÉORÈME 8.4. *Si (K, c) et (K^{D}, b) sont les deux en position générale, alors le problème* (8.1) *est stable par rapport à la fonctionnelle et à la solution.*

DÉMONSTRATION. Soit, dans l'espace $\mathbf{R}^{n+m}$, le système d'équations et d'inéquations

$$\begin{gathered}\langle c, x\rangle = \langle b, p\rangle,\\ Ax \leqslant b,\ A'p = c,\ p \geqslant 0.\end{gathered} \tag{8.19}$$

Il est connu en théorie de la dualité que ce système possède une solution si et seulement si les problèmes en dualité (8.1), (8.18) sont possibles, et l'ensemble de ses solutions est égal à $X^0 \times P^0 = \{(x, p) \mid x \in X^0, p \in P^0\}$. Les ensembles X^0 et P^0 sont non vides et bornés par hypothèse, d'où les mêmes propriétés de $X^0 \times P^0$.

On fait correspondre au problème perturbé (8.2) le système

$$\begin{gathered} \langle c(\delta), x\rangle = \langle b(\delta), p\rangle, \\ A(\delta)\, x \leqslant b(\delta),\ A'(\delta)\, p = c(\delta),\ p \geqslant 0. \end{gathered} \tag{8.20}$$

On trouve par le théorème 8.3 un nombre $\delta_0 > 0$ tel que l'ensemble $X^0(\delta) \times P^0(\delta)$ des solutions de (8.20) n'est pas vide quel que soit δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$. Selon le théorème 8.2, $X^0(\delta) \times P^0(\delta)$ sont pour $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ bornés dans leur ensemble.

Supposons que l'affirmation du théorème est fausse. Il existe une suite $\{\delta_k\}$ de nombres positifs, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$, telle que, ou bien la suite $d(\delta_k)$ ne converge pas vers la valeur d du problème (8.1), ou bien on trouve un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\| x - x(\delta_k) \| \geqslant \varepsilon$ quels que soient $x(\delta_k) \in X^0(\delta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, et $x \in X^0$.

Soit $x(\delta_k) \in X^0(\delta_k)$, $p(\delta_k) \in P^0(\delta_k)$ des vecteurs quelconques, $k = 1, 2, \ldots$ Comme $X^0(\delta) \times P^0(\delta)$ sont bornés dans leur ensemble, on dit que les suites $\{x(\delta_k)\}$, $\{p(\delta_k)\}$ sont convergentes. Soit

$$\lim_{k\to\infty} x(\delta_k) = x^0, \quad \lim_{k\to\infty} p(\delta_k) = p^0.$$

Les vecteurs $x(\delta_k)$, $p(\delta_k)$ vérifient le système (8.20) pour $\delta = \delta_k$ et les fonctions $A(\delta)$, $b(\delta)$, $c(\delta)$ sont continues, si bien qu'on passe dans (8.20) à la limite quand $k \to \infty$, il vient

$$\begin{gathered} \langle c, x^0\rangle = \langle b, p^0\rangle, \\ Ax^0 \leqslant b,\ A'p^0 = c,\ p^0 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Cela signifie, on l'a dit, que $x^0 \in X^0$, $p^0 \in P^0$ et $\langle c, x^0\rangle = d$, auquel cas l'égalité $\lim\limits_{k\to\infty} x(\delta_k) = x^0$ contredit la condition $\| x^0 - x(\delta_k) \| \geqslant \varepsilon$. Du moment que

$$\lim_{k\to\infty} d(\delta_k) = \lim_{k\to\infty} \langle x(\delta_k), c\rangle = \langle x^0, c\rangle = d,$$

on vient de montrer que l'autre proposition de l'alternative n'est pas juste non plus.

Avec les théorèmes 8.3 et 8.4, on a l'équivalence des trois notions de stabilité en programmation linéaire, et on dira « stabilité » tout court sans préciser sa nature.

Le théorème 8.3 aidant, on énonce pour chaque type des programmes linéaires des critères de stabilité plus commodes.

Voyons ce qu'il en est de (8.1) et des problèmes sous forme canonique et standard.

THÉORÈME 8.5. *Le problème* (8.1) *est stable si et seulement si*
1) *la matrice A est de rang n, n étant le nombre de ses colonnes*;
2) *il existe des vecteurs $x^0 \in \mathbf{R}^n$ et $p^0 \in \mathbf{R}^m$ tels que $Ax^0 < b$, $A'p^0 = c$, $p^0 > 0$.*

DÉMONSTRATION. Aux termes du théorème 8.3 et des définitions 8.4 à 8.6, une condition nécessaire et suffisante de stabilité de (8.1) est que le rang de la matrice A soit n et on trouve des vecteurs $p^0 \in \mathbf{R}^m$, $y^0 \in \mathbf{R}^n$, $z^0 \in \mathbf{R}^n$, $w^0 \in \mathbf{R}^m$ tels que $p^0 > 0$, $y^0 > 0$, $z^0 > 0$, $w^0 > 0$ et $A'p^0 = c$, $Ay^0 - Az^0 + w^0 = b$. On pose $x^0 = y^0 - z^0$ et on a l'équivalence de la dernière condition et de $Ax^0 < b$.

THÉORÈME 8.6. *Le programme linéaire sous forme standard*

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0$$

est stable si et seulement s'il existe des vecteurs $x^0 \in \mathbf{R}^n$ et $p^0 \in \mathbf{R}^m$ tels que $x^0 > 0$, $p^0 > 0$, $Ax^0 < b$, $A'p^0 > c$.

DÉMONSTRATION. On ramène le problème proposé à la forme (8.1):

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax \leqslant b, \ -x \leqslant 0,$$

auquel cas $K = \mathrm{Co}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m, -e^1, -e^2, \ldots, -e^n)$. Le cône K est solide pour toute matrice A car il contient n vecteurs linéairement indépendants $-e^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Il reste à démontrer que le vecteur c est intérieur à K (th. 8.3), i.e. on trouve des vecteurs positifs $p^0 \in \mathbf{R}^m$, $y^0 \in \mathbf{R}^n$ ayant la propriété $A'p^0 - y^0 = c$, i.e. $A'p^0 > c$. On procède de même en ce qui concerne le vecteur x^0.

THÉORÈME 8.7. *Le programme linéaire sous forme canonique*

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax = b, \ x \geqslant 0$$

est stable si et seulement si
1) *la matrice A est de rang m, m étant le nombre de lignes de A*;
2) *il existe des vecteurs $x^0 \in \mathbf{R}^n$ et $p^0 \in \mathbf{R}^m$ tels que $Ax^0 = b$, $x^0 > 0$, $A'p^0 > c$.*

La démonstration est celle du théorème 8.5 à condition d'intervertir le primal et le dual.

§ 4. Régularisation des problèmes instables

Soit le problème sous forme standard

$$\begin{gathered}\max \langle c, x\rangle \\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.\end{gathered} \tag{8.21}$$

On suppose qu'il y a instabilité. Conformément au théorème 8.6, les causes en sont 1) la non-existence d'un vecteur $x^0 > 0$ tel que $Ax^0 < b$; 2) la non-existence d'un vecteur $p^0 > 0$ tel que $A'p^0 > c$. Dans les deux cas, on risque d'aboutir en calcul automatique à des résultats qui diffèrent sensiblement des valeurs réelles. On note que même s'il s'agit de (8.21) stable, sa forme n'en laisse souvent rien paraître.

La régularisation des problèmes mal posés due à Tikhonov (voir par exemple [25]) est à la base de plusieurs méthodes qui permettent de résoudre un programme linéaire quelconque aussi exactement qu'on le veut, sans se soucier de sa stabilité.

Voici une méthode de régularisation qui reste dans le cadre de la programmation linéaire.

On suppose l'existence pour le problème (8.21), ce qui signifie, en particulier, qu'il a un sens, ainsi que son dual, i.e. on trouve des vecteurs $\bar{x} \geqslant 0$: $A\bar{x} \leqslant b$, et $\bar{p} \geqslant 0$: $A\bar{p} \geqslant c$.

Ecrivons le problème perturbé correspondant

$$\begin{gathered}\max \langle c - \delta e, x\rangle \\ Ax \leqslant b + \delta v,\ x \geqslant 0,\end{gathered} \tag{8.22}$$

où $\delta > 0$ est un nombre, $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$, $v = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^m$.

Lemme 8.8. *Si le problème* (8.21) *est possible, alors le problème* (8.22) *est stable pour tout* $\delta > 0$.

Démonstration. On montre que le problème perturbé respecte les conditions du théorème 8.6. On pose $x^0 = \bar{x} + \alpha e$, $p^0 = \bar{p} + \alpha v$. Comme $A\bar{x} < b + \delta v$, $A'\bar{p} > c - \delta e$, on trouve un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$Ax^0 = A\bar{x} + \alpha Ae < b + \delta v,$$

$$A'p^0 = A'\bar{p} + \alpha A'v > c - \delta e,$$

et $x^0 > 0$, $p^0 > 0$.

On note d la valeur de (8.21) et $d(\delta)$ celle du problème (8.22).

Théorème 8.8. $\lim\limits_{\delta \to 0} d(\delta) = d$.

DÉMONSTRATION. Soient x^* et p^* solutions de (8.21) et de son dual respectivement. Le vecteur x^* est réalisable pour (8.22) quel que soit $\delta > 0$. Par conséquent, $\langle c - \delta e, x^* \rangle \leqslant d(\delta)$ ou $\langle c, x^* \rangle - \delta \langle e, x^* \rangle \leqslant d(\delta)$. Vu que $\langle c, x^* \rangle = d$, on a

$$d(\delta) \geqslant d - \delta \langle e, x^* \rangle. \tag{8.23}$$

On procède de même pour les duals de (8.21) et (8.22). il vient $d(\delta) \leqslant \leqslant d + \delta \langle v, p^* \rangle$. Finalement,

$$d - \delta \langle e, x^* \rangle \leqslant d(\delta) \leqslant d + \delta \langle v, p^* \rangle,$$

d'où le résultat voulu.

Il reste à montrer que la solution $x(\delta)$ du problème (8.22) est pour δ petits voisine de l'ensemble X^0 des solutions de (8.21).

LEMME 8.9. *Soit $\delta_0 > 0$. L'ensemble $X^0(\delta)$ des solutions du problème (8.22) est borné dans l'ensemble pour tout $0 < \delta \leqslant \delta_0$.*

DÉMONSTRATION. Soient $x^* \in X^0$ et p^* solutions respectives du problème (8.21) et de son dual. Dans ce cas, $A'p^* - c \geqslant 0$ et $A'p^* - - (c - \delta e) \geqslant \delta e$. On multiplie scalairement l'inéquation donnée par $x(\delta)$ quelconque de $X^0(\delta)$:

$$\langle x(\delta), A'p^* \rangle - \langle x(\delta), c - \delta e \rangle \geqslant \delta \langle e, x(\delta) \rangle.$$

Puisque $\langle x(\delta), c - \delta e \rangle = d(\delta)$,

$$\langle x(\delta), A'p^* \rangle = \langle Ax(\delta), p^* \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle b + \delta v, p^* \rangle = \langle b, p^* \rangle + \delta \langle v, p^* \rangle = d + \delta \langle v, p^* \rangle,$$

on a $\delta \langle e, x(\delta) \rangle \leqslant d + \delta \langle v, p^* \rangle - d(\delta)$. On utilise (8.23), il vient

$$\delta \langle e, x(\delta) \rangle \leqslant \delta \langle v, p^* \rangle + \delta \langle e, x^* \rangle,$$

d'où

$$\langle e, x(\delta) \rangle \leqslant \langle v, p^* \rangle + \langle e, x^* \rangle.$$

Le lemme se trouve démontré parce que $e > 0$, $x(\delta) \geqslant 0$ et le second membre de l'inéquation obtenue ne dépend pas de δ.

THÉORÈME 8.9. *Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel qu'il corresponde à chaque solution $x(\delta) \in X^0(\delta)$ du problème (8.22) une solution $x^* \in X^0$ de (8.21) qui vérifie l'inégalité $\| x(\delta) - x^* \| < \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION. On suppose le contraire, et on trouve une suite $\{\delta_k\}$ de nombres positifs, $\lim_{k \to \infty} \delta_k = 0$, et une suite de vecteurs $x(\delta_k) \in \in X^0(\delta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, qui satisfont à

$$\| x(\delta_k) - x \| \geqslant \varepsilon \tag{8.24}$$

pour tout $x \in X^0$.

Selon le lemme 8.9, $X^0(\delta)$ sont bornés dans leur ensemble pour $0 < \delta \leqslant \delta_0$, si bien que la suite $\{x(\delta_k)\}$ est convergente. Soit

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x(\delta_k). \tag{8.25}$$

Chaque $x(\delta_k)$ remplit les conditions

$$\langle c - \delta_k e,\ x(\delta_k)\rangle = d(\delta_k),$$
$$Ax(\delta_k) \leqslant b + \delta_k v,\ x(\delta_k) \geqslant 0.$$

On passe à la limite pour $k \to \infty$ dans le système donné d'équations et d'inéquations et on se rappelle que $\lim\limits_{k\to\infty} d(\delta_k) = d$ (th. 8.8), il vient

$$\langle c,\ x^*\rangle = d,\ Ax^* \leqslant b,\ x^* \geqslant 0,$$

ce qui signifie $x^* \in X^0$. La formule (8.24) contredit donc (8.25).

Ainsi, les théorèmes 8.8 et 8.9 justifient le procédé suivant pour résoudre un problème instable de la forme (8.21) : choisir une suite de nombres positifs $\{\delta_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$, et aborder les problèmes (8.22) pour $k = 1, 2, \ldots$ en posant $\delta = \delta_k$.

ANNEXE

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

La pratique de la méthode simpliciale et de ses variantes prouve leur grande efficacité. Ainsi, on résout de règle un programme linéaire à m contraintes et n variables au bout de m itérations, et les opérations arithmétiques élémentaires sont environ n^2m. D'autre part, des tentatives ont été faites pour apprécier théoriquement l'effort de calcul en fonction des paramètres de départ. En 1972, Klee et Minty formulent un programme linéaire à n variables et $2n$ contraintes qui demande au moins 2^n-1 itérations de la méthode du simplexe, i.e. s'agissant de la classe des problèmes linéaires, le nombre de calculs est évalué par une fonction exponentielle des paramètres. On connaît des exemples analogues pour la méthode des potentiels appliquée au problème de transport. Ces faits sont décevants. En effet, certains problèmes de taille relativement modeste demandent donc, pour être résolus par la technique simpliciale, un temps prohibitif. Bien que les exemples du genre soient franchement artificiels et qu'il n'en soit rien dans la pratique, on s'interroge cependant sur l'existence d'un algorithme qui donne la solution d'un programme linéaire arbitraire après des calculs représentés par un polynôme dont les indéterminées sont les paramètres du programme. En d'autres termes, on veut savoir si la « complexité » de ladite classe des problèmes est exponentielle ou si elle est polynomiale.

Nous ne nous proposons pas de préciser les notions d'algorithme complexe et d'algorithme laborieux, il nous suffit de les comprendre intuitivement. Nous tenons cependant à dire que lorsqu'on parle de la complexité des algorithmes, on peut se borner à des problèmes dont tous les paramètres d'entrée (les éléments de la matrice A et les coordonnées des vecteurs b et c) sont des nombres rationnels (un calculateur électronique ne travaille-t-il pas uniquement sur des rationnels avec des chiffres en nombre déterminé ?). Il y a plus. On peut estimer que tous les paramètres du problème sont des entiers (il suffit de réduire les rationnels au même dénominateur). On évalue naturellement la complexité de l'algorithme compte tenu de la précision du calcul (i.e. du nombre de chiffres).

On suppose que dans le problème $\max \langle c, x\rangle$, $Ax \leqslant b$, tous les éléments a_{ij} de la matrice A et les coordonnées b_i, c_j des vecteurs b, c sont des entiers ; $h = \max_{i,j} \{|a_{ij}, |b_i|, |c_j|\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. On conçoit que le volume de calculs dépend de m, n, h.

Est-ce que le volume de calculs d'un problème arbitraire de la programmation linéaire est majoré par un polynôme à m, n, h ?

Etant donnés les faits ci-dessus, on optait pour la réponse négative. Aussi l'article « Un algorithme polynomial en programmation linéaire » de Khatchian ([27]) a fait l'effet d'une bombe. L'auteur met en œuvre un procédé de calcul original (connu sous le nom de méthode des ellipsoïdes) dû à Némirovski, Chor et Youdine et démontre un théorème qui s'énonce comme suit (on écrit $f = O(g)$ pour $f(\xi)$, $g(\xi)$ arbitraires s'il existe une constante K telle que la fonction $f(\xi) \leqslant Kg(\xi)$ pour tout ξ.

THÉORÈME 1. *Il suffit, pour résoudre un problème de programmation linéaire, $O(n^4(n+m)\ln hn)$ opérations élémentaires (addition, soustraction, produit, division, racine carrée, plus grand de deux nombres) et une précision (le nombre de chiffres) $O(n \ln hn)$.*

On se borne à une description sommaire de la méthode des ellipsoïdes. Khatchian montre fort simplement dans [28] qu'il suffit, pour résoudre un programme linéaire, de disposer d'un algorithme qui établit si oui ou non un système arbitraire

$$Ax \leqslant b \tag{1}$$

est compatible. Ce rôle incombe justement à la méthode des ellipsoïdes. Elle s'inspire des considérations suivantes. Soit δ le plus grand module des mineurs de la matrice allongée du système (1). L'inégalité d'Hadamard connue entraîne la relation entre δ et h:

$$\ln \delta n \leqslant n \ln hn.$$

LEMME 1. *Si le système* (1) *est compatible, sa solution est dans la boule* $E_0 = \{x \mid \| x \| \leqslant \delta\sqrt{n}\}$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre le cas où le rang n de A est égal au nombre de variables. Soit $\bar{x}$ un point extrême de l'ensemble des solutions de (1). Conformément au théorème 2.18 et à la règle de Cramer, les coordonnées $\bar{x}_j$ de $\bar{x}$ s'écrivent $\bar{x}_j = \Delta_j/\Delta$, où Δ_j, $\Delta \neq 0$, sont des mineurs de la matrice allongée du système. On a $| \Delta_j | \leqslant \delta$, $| \Delta | \geqslant 1$ (les coefficients étant des entiers) et $|\bar{x}_j| \leqslant \delta$.

Ainsi, s'il y a compatibilité de (1), le lemme 1 permet de localiser au moins une de ses solutions. On introduit la fonction $\theta(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{(Ax)_i - b_i\}$ qui est le résidu au point $x \in \mathrm{R}^n$. On désigne par $x^0 = 0$ le centre de la boule (de l'ellipsoïde E_0). Si $\theta(x^0) \leqslant 0$, alors x^0 est solution du système proposé. Soit le cas $\theta(x^0) > 0$ et s tel que $\theta(x^0) = \langle a_s, x^0\rangle - b_s$, i.e. x^0 ne vérifie pas la s-ième inéquation. Tout vecteur x respectant cette inéquation se trouve manifestement dans le demi-espace $\langle a_s, x\rangle \leqslant \langle a_s, x^0\rangle$. L'intersection Q_0 de ce demi-espace et de E_0 est un demi-ellipsoïde (vu que l'hyperplan $\langle a_s, x\rangle = \langle a_s, x^0\rangle$ passe par le centre de E_0). Par des considérations précédentes, Q_0 contient une solution du système (1). Pour que l'algorithme soit uniforme à toutes les itérations, on décrit autour de Q_0 l'ellipsoïde E_1 le plus petit possible et on initialise le processus avec E_1 et son centre x^1. On note une ressemblance évidente de cet algorithme et du procédé de bissection d'un segment. Les calculs formels sont ordonnés comme suit. Un ellipsoïde arbitraire E de R^n est défini par la formule $E = \{y \mid y = x + Bz, \| z \| \leqslant 1\}$, avec x le centre de E et B une matrice à n lignes et n colonnes. On dispose, au début de la k-ième itération de la méthode des ellipsoïdes, du centre x^k de l'ellipsoïde courant et de B_k associée. L'itération de numéro $k = 1, 2, \ldots$ consiste à

1) calculer le résidu $\theta(x^k)$ relatif au vecteur x^k. Si $\theta(x^k) \leqslant 0$, alors x^k est solution du problème, et on stoppe les calculs. Dans le cas contraire, on cherche un indice s tel que $\theta(x^k) = \langle a_s, x^k\rangle - b_s$;

2) trouver le vecteur $\eta_k - B_k' a_s$. Si $\eta_k = 0$, on s'arrête. Dans le cas contraire, on construit la matrice Γ_k dont l'élément de numéro (i, j) est égal à $(\eta_k)_i \times (\eta_k)_j$;

3) définir l'ellipsoïde suivant par les égalités

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{(n+1) \| \eta_k \|} B_k' \eta_k,$$

$$B_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{16n^2}\right) \frac{n}{(n^2-1)^{1/2}} \left\{B_k + \frac{1}{\| \eta_k \|^2} \left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1/2} - 1\right] B_k \Gamma_k\right\}.$$

On note qu'avec ces formules, on calcule de façon approximative avec la précision indiquée, ce qui permet de rester dans le domaine des nombres rationnels.

L'algorithme s'arrête ou bien pour des raisons décrites, ou bien au bout de $O(n^2 \ln \delta n)$ itérations.

On justifie l'algorithme par les résultats suivants.

LEMME 2. *Si le système* (1) *est incompatible, alors on a* $\theta(x) \geqslant 1/(2n\,\delta)$ *pour tout point* $x \in \mathbf{R}^n$.

La démonstration est basée sur la même idée que celle du lemme 1, aussi on passe outre.

Soit $\bar{\theta} = \min\limits_{x \in E_0} \theta(x)$.

THÉORÈME 2. *On suppose que la méthode des ellipsoïdes appliquée au problème* (1) *s'arrête après* N *itérations et* $\theta(x^q) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant N+1} \theta(x^k)$. *On a* $\theta(x^q) \leqslant \bar{\theta} + 1/(4n\delta)$.

Pour la démonstration (qui est assez fastidieuse), voir [28].

LEMME 3. *Le système* (1) *est compatible si et seulement si* $\theta(x^q) \leqslant 1/(4n\delta)$.

DÉMONSTRATION. Si $\theta(x^q) \leqslant 1/(4n\delta)$, alors le système est compatible par le lemme 2. Soit $\theta(x^q) > 1/(4n\delta)$. Comme $\bar{\theta} \geqslant \theta(x^q) - 1/(4n\delta) > 0$, on a $\theta(x) > 0$ pour tout $x \in E_0$, et le lemme 1 entraîne l'incompatibilité.

D'où provient l'estimation du nombre d'opérations élémentaires du théorème 1 ? Il y a au plus $O(n^2 \ln \delta n)$ itérations de l'algorithme. A chaque itération, le calcul du résidu se fait en $O(nm)$ opérations, et la recherche de la nouvelle matrice en exige $O(n^2)$. Cela fait au total $O(n(n+m))$ opérations par itération. On compte donc $O(n^3(n+m) \ln \delta n)$ opérations par algorithme. Avec la relation entre δ et h, on obtient le résultat voulu.

Nous voulons dire pour conclure que si les estimations obtenues témoignent d'une efficacité plus grande de la méthode des ellipsoïdes devant la méthode simpliciale, cet avantage est purement théorique car on traite en l'occurrence les programmes linéaires les plus « mauvais », très éloignés des cas réels. Dans la pratique, la méthode du simplexe reste l'outil principal de la programmation linéaire.

DISCUSSION DES EXERCICES

CHAPITRE II

1. L'ensemble des points rationnels du segment $[0, 1]$.

2. Soit $x^1, x^2 \in X$, $x \in [x^1, x^2]$. On partage en deux le segment contenant x. Comme les extrémités sont dans X, on obtient une suite de points (par exemple d'extrémités gauches des segments partiels) appartenant à X et ayant x pour limite. Le caractère fermé de X fait que $x \in X$.

3. Soit $(x_1, y_1) \in X$, $(x_2, y_2) \in X$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. On démontre que $\alpha y_1 + \beta y_2 \geqslant 1/(\alpha x_1 + \beta x_2)$ en se rappelant que $y_1 \geqslant 1/x_1$, $y_2 \geqslant 1/x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. D'où $\alpha y_1 \geqslant \alpha/x_1$, $\beta y_2 \geqslant \beta/x_2$ ou $\alpha y_1 + \beta y_2 \geqslant \alpha/x_1 + \beta/x_2$. Il suffit de démontrer l'inégalité $\alpha/x_1 + \beta/x_2 \geqslant 1/(\alpha x_1 + \beta x_2)$ ou $\alpha^2 + \alpha\beta\,(x_1/x_2 + x_2/x_1) + \beta^2 \geqslant 1$. Comme $x_1/x_2 + x_2/x_1 \geqslant 2$, on a $\alpha^2 + \alpha\beta\,(x_1/x_2 + x_2/x_1) + \beta^2 \geqslant \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 = 1$.

4. On prend le point $(5, 1/5)$ de l'hyperbole, i.e. un point de la frontière de l'ensemble X, et on mène une tangente à l'hyperbole en ce point. On utilise à cet effet la formule $(y - y_0)/(x - x_0) = f'(x_0)$ qui définit la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point (x_0, y_0), il vient l'équation de la droite $x/5 + 5y = 2$. On y porte les coordonnées du point $(5, 0)$: $(1/5)5 + 5 \cdot 0 < 2$. Il reste à montrer que $x/5 + 5y \geqslant 2$ pour tout point $(x, y) \in X$. Vu que $y \geqslant 1/x$, on a $x/5 + 5y \geqslant x/5 + 5/x \geqslant 2\sqrt{x/5\,(5/x)} = 2$. On vient d'utiliser la non-égalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de deux nombres positifs.

5. On suppose le contraire, et soit $x^1, x^2 \in X$, $x^0 \in [x^1, x^2]$, $x^0 \notin X$. On construit l'hyperplan $\langle p, x\rangle = c$ qui sépare x^0 et X : $\langle p, x^0\rangle > c$, $\langle p, x\rangle \leqslant c$, $x \in X$. Soit $x^0 = \alpha x^1 + \beta x^2$, où $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. On fait l'addition de $\langle p, x^1\rangle \leqslant c$, $\langle p, x^2\rangle \leqslant c$ de coefficients α et β, il vient $\langle p, x^0\rangle \leqslant c$: contradiction avec l'équation $\langle p, x\rangle = c$ de l'hyperplan.

6. Soit $x^1, x^2 \in X$, $b = x^1/2 + x^2/2$, auquel cas

$$\| b - a \| = \| (x^1 - a)/2 + (x^2 - a)/2 \| \leqslant$$
$$\leqslant \| x^1 - a \|/2 + \| x^2 - a \|/2 \leqslant \| b - a \|.$$

On a recouru à l'inégalité du triangle et à $\| x^i - a \| \leqslant \| b - a \|$. La suite d'inégalités ci-dessus montre que

$$\| x^1 - a \| = \| b - a \| = \| x^2 - a \|,$$
$$\|(x^1 - a) + (x^2 - a)\| = \| x^1 - a \| + \| x^2 - a \|.$$

La dernière égalité et les propriétés des normes impliquent $x^1 - a = \lambda\,(x^2 - a)$, où $\lambda > 0$. Les vecteurs $x^1 - a$ et $x^2 - a$ étant de même longueur, on obtient $\lambda = 1$, i.e. $x^1 = x^2$, donc b est un point extrême.

7. L'intersection d'un hyperplan et d'un compact convexe est un compact convexe. Cette intersection possède des points extrêmes (voir exer. 6). Il est évident que les points extrêmes de l'intersection sont autant de points extrêmes du compact convexe de départ.

8. Dans le plan, c'est, par exemple, l'épigraphe de la partie positive d'une hyperbole (voir exer. 2) et la droite $y = 0$.

9. Soient $\langle p^1, x\rangle = c_1$, $\langle p^2, x\rangle = c_2$ tels que $\langle p^1, x^0\rangle = c_1$, $\langle p^2, x^0\rangle = c_2$, $\langle p^1, x\rangle \leqslant c_1$, $\langle p^2, x\rangle \leqslant c_2$ pour tout $x \in X$. On constate aisément que l'hyperplan $\langle p, x\rangle = c$ quelconque, où $p = \alpha p^1 + \beta p^2$, $c = \alpha c_1 + \beta c_2$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, est un hyperplan d'appui à X en x^0.

10. Soit $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, où $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Evidem-

ment, $\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\begin{pmatrix}1\\x^i\end{pmatrix}$. On applique le lemme 2.1 aux points $\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\x^i\end{pmatrix}$, $i=1, 2, \ldots, k$, de l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$, il vient que le point $\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $n+1$ points:

$$\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}=\sum_{s=1}^{n+1}\beta_s\begin{pmatrix}1\\x^{i_s}\end{pmatrix},$$

où $\sum_{s=1}^{n+1}\beta_s=1$, $\beta_s\geqslant 0$, $s=1, 2, \ldots, n+1$. Dans ce cas, $x=\sum_{s=1}^{n+1}\beta_s x^{i_s}$.

11. On vérifie directement la définition 2.6 d'un cône convexe.

12. Soit $p^1, p^2\in K^*$, $\alpha, \beta\geqslant 0$. Si $x\in K$ est un vecteur arbitraire, alors $\langle x, \alpha p^1+\beta p^2\rangle=\alpha\langle x, p^1\rangle+\beta\langle x, p^2\rangle\leqslant 0$ parce que $\langle x, p^1\rangle\leqslant 0$, $\langle x, p^2\rangle\leqslant 0$.

13. Si $p\in K^*$, alors $\langle e^i, p\rangle\leqslant 0$, $\langle -e^i, p\rangle\leqslant 0$, avec e^i le i-ième vecteur unité de l'espace $\mathbf{R}^n$, $i=1, 2, \ldots, n$. Donc, $K^*=0$.

14. Il est clair que $K^+\supseteq K^*$. Soient $p\in K^+$, $x\in K$, auquel cas

$$x=\sum_{i=1}^{k}\beta_i x^i,\ \langle p, x\rangle=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\langle p, x^i\rangle\leqslant 0,\ \text{i.e. } K^+\subseteq K^*.$$

15. Conformément à l'exercice précédent, on se donne K^* par le système d'inéquations linéaires $\langle x^i, p\rangle\leqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, k$, où x^i, $i=1, 2, \ldots, k$, sont les générateurs du cône polyédrique K. K^* est un cône polyédrique convexe par le théorème 2.21.

16. La conséquence du théorème 2.15 dit que $K=K^{**}$, si bien qu'il suffit d'utiliser l'affirmation de l'exercice 14.

17. Soit K le plus petit cône convexe contenant l'ensemble M. Co (M) étant un cône convexe, ainsi que l'intersection de cônes convexes, on a Co $(M)\supseteq K$. D'autre part, K contient, par définition d'un cône convexe, toutes les combinaisons linéaires non négatives des éléments de M, i.e. $K\supseteq$ Co (M).

CHAPITRE III

1. Il est clair que le problème a un sens (le vecteur $x=0$ en est un programme). On montre qu'il en est de même du dual

$$\min\ \langle b, p\rangle$$
$$A'p\geqslant c,\quad p\geqslant 0.$$

Soit $e=(1, 1, \ldots, 1)\in\mathbf{R}^m$, auquel cas

$$A'e=\Big(\sum_{i=1}^{m}a_{i1},\ \sum_{i=1}^{m}a_{i2},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m}a_{in}\Big),$$

et les conditions imposées à la matrice A entraînent la positivité de toutes les coordonnées de ce vecteur. On a alors $\lambda A'e\geqslant c$ pour $\lambda>0$ suffisamment grand, i.e. le vecteur $p=\lambda e$ est réalisable pour le dual. Les deux problèmes en dualité ayant un sens sont possibles l'un et l'autre par le théorème de dualité.

2. VARIANTE 1. Soit $X=\{x\mid Ax\leqslant 0\}$. Si l'on a $\langle c, x\rangle\leqslant 0$ pour chaque $x\in X$, alors $x=0$ est évidemment une solution du problème. Mais si l'on trouve un vecteur $x^0\in X$ tel que $\langle c, x^0\rangle>0$, il y a impossibilité car tout vecteur λx^0, $\lambda>0$, appartient à X et la valeur $\lambda\langle c, x^0\rangle$ peut être arbitrairement grande.

VARIANTE 2. Le problème D (0, c) est possible si P (0, c) l'est. Comme la fonction économique de celui-là est définie par le vecteur nul, sa valeur et, partant, la valeur de P (0, c) est égale à 0. Si P (0, c) admet une solution, il s'agit donc de $x = 0$.

3. Soient x^0 et p^0 des vecteurs réalisables du primal et du dual respectivement. On vérifie de suite que x^0 et p^0 sont réalisables pour les problèmes associés avec b' modifié.

4. On construit le problème dual

$$\begin{aligned} &\max (p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n) \\ &p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n \leqslant 1, \\ &p_2 + p_3 + \ldots + p_n \leqslant 2, \\ &p_3 + \ldots + p_n \leqslant 3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &p_n \leqslant n, \\ &p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Le primal et le dual ont évidemment un sens, et ils sont donc possibles. Les conditions de non-négativité entraînent que tout vecteur réalisable $p = (p_1$ $p_2, \ldots, p_n)$ (et. partant, toute solution) du dual vérifie toutes les contraintes à partir de la deuxième comme inégalité stricte $\sum_{i=k}^{n} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 1 < k$. D'après le théorème d'équilibre, on a, dans toute solution $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ du primal, $x_j^* = 0$, $j = 2, \ldots, n$. D'où l'on déduit sans peine la solution unique du primal $x^* = (n, 0, 0, \ldots, 0)$.

5. Vu les conditions b, $a_j > 0$, l'ensemble admissible $X = \{x \mid x \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b\}$ est non vide et borné, i.e. c'est un polyèdre convexe. Il est immédiat de vérifier que tous les points extrêmes de ce polyèdre s'écrivent $(0, 0, \ldots, 0, b/a_j, 0, \ldots, 0)$. Ne sont optimaux que ceux des points extrêmes pour lesquels $c_k b/a_k = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (c_j b/a_j)$. Si cet indice k est unique, il y a unicité pour le problème. On l'a, en particulier, dans le cas de tous les nombres $c_j b/a_j$ distincts. Soit $\sigma = \{k_1, k_2, \ldots, k_q\}$ l'ensemble des indices k_r, $1 \leqslant k_r \leqslant n$, $r = 1, 2, \ldots, q$, tels que $c_{k_r} b/a_{k_r} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (c_j b/a_j)$. Les vecteurs $x^r = (0, 0, \ldots, 0, b/a_{k_r}, 0, \ldots, 0)$, $r = 1, 2, \ldots, q$, épuisent avec eux tous les points extrêmes du polyèdre, si bien qu'une solution arbitraire du problème a la forme $x = \sum_{r=1}^{q} \alpha_r x^r$, où $\alpha_r \geqslant 0$, $r = 1, 2, \ldots, q$, $\sum_{r=1}^{q} \alpha_r = 1$, i.e.

$$x = (0, \ldots, 0, \alpha_1 b/a_{k_1}, 0, \ldots, \alpha_2 b/a_{k_2}, \ldots, 0, \alpha_q b/a_{k_r}, 0, \ldots, 0).$$

6. Prenons le problème dual

$$\min (-4p_1 + 2p_2 + 8p_3)$$

$$-\mu p_1 + 2p_2 + 3\mu p_3 = 1, \quad -p_1 - p_2 - p_3 = 3\lambda, \quad p_1, p_2, p_3 \geqslant 0.$$

Le programme $x^0 = (0, 4)$ vérifiant la deuxième et la troisième contrainte comme inégalité stricte est optimal sous la condition nécessaire et suffisante que le problème dual possède un programme de la forme $p = (p_1, 0, 0)$. Dans ce cas, $-\mu p_1 = 1$, $-p_1 = 3\lambda$, d'où $\mu < 0$, $\lambda < 0$ et $3\lambda\mu = 1$.

7. La condition entraîne que $\langle c, x\rangle \leqslant d$ et $\langle c, x\rangle \geqslant d$ sont une conséquence du système d'inéquations $Ax \leqslant b$, $-Ax \leqslant -b$.

Selon le théorème 2.27, il existe un vecteur (u, v) de dimension $2m$ non négatif pour lequel $A'u - A'v = c$ et $\langle b, u\rangle - \langle b, v\rangle \leqslant d$. On introduit la notation $p = u - v \in \mathrm{R}^m$, il vient $c = A'p$ et $\langle b, p\rangle \leqslant d$. On montre que $\langle b, p\rangle = d$. Soit x un vecteur quelconque tel que $Ax = b$. Dans ce cas, $\langle c, x\rangle = \langle A'p, x\rangle = \langle p, Ax\rangle = \langle p, b\rangle$. D'autre part, $\langle c, x\rangle = d$ (l'équation donnée est par hypothèse une conséquence du système $Ax = b$). Ainsi, $\langle p, b\rangle = d$.

8. Soit $Ax^0 < 0$, $A'p^0 > 0$, $p^0 \geqslant 0$. Le problème primal a un sens parce que le vecteur λx^0 vérifie la contrainte pour $\lambda > 0$ suffisamment grand.

De même, le vecteur μp^0 est réalisable pour le dual quels que soient c et $\mu > 0$ suffisamment grand. On conclut par le théorème de dualité, que les deux problèmes sont possibles pour tout b et tout c.

Inversement, si l'on admet que le problème considéré est possible pour n'importe quels b et c, alors il en est de même du dual. Soit $b < 0$, $c > 0$ et soient x^0 et p^0 des vecteurs réalisables quelconques. On a $Ax^0 < 0$, $A'p^0 > 0$.

9. On prend pour c le vecteur a_i. En effet, tout $x \in X$ vérifie $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, et $\langle a_i, x^0\rangle = b_i$, i.e. $\langle a_i, x\rangle \leqslant \langle a_i, x^0\rangle$ pour chaque x de X.

10. C_{x^0} contient des vecteurs non nuls (exer. 9). Soient $c^1, c^2 \in C_{x^0}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Il faut montrer que $\alpha c^1 + \beta c^2 \in C_{x^0}$, i.e. $\langle \alpha c^1 + \beta c^2, x^0\rangle \geqslant \langle \alpha c^1 + \beta c^2, x\rangle$ pour tout $x \in X$.

Mais le fait « $c^1, c^2 \in C_{x^0}$ » entraîne

$$\langle c^1, x^0\rangle \geqslant \langle c^1, x\rangle, \ \langle c^2, x^0\rangle \geqslant \langle c^2, x\rangle \ \forall\, x \in X.$$

On multiplie ces inéquations par α et β respectivement et on additionne les résultats.

11. Soit $b^1, b^2 \in B_c$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, $b = \alpha b^1 + \beta b^2$. Il faut prouver l'appartenance $b \in B_c$. Pour cela, il suffit d'établir que les problèmes (3.2) et (3.4) ont un sens. Il en est évidemment ainsi du second problème parce que l'ensemble P est indépendant de b et il a un sens, par hypothèse pour la fonction économique $\langle b^1, p\rangle$. On note $X(b)$ l'ensemble admissible de (3.2). Soit $x^1 \in X(b^1)$, $x^2 \in X(b^2)$. Dans ce cas, $\alpha x^1 + \beta x^2 \in X(b)$ du moment que $A(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha A x^1 + \beta A x^2 \leqslant \alpha b^1 + \beta b^2 = b$.

12. Avec les notations de l'exercice précédent, $b \in B_c$, $b + \lambda s \in B_c$.

On montre que $b + \lambda' s$ est une combinaison linéaire convexe de ces vecteurs. On pose $\beta = \lambda'/\lambda$, $\alpha = 1 - \beta$, auquel cas $\alpha b + \beta(b + \lambda s) = b + \lambda' s \in B_c$.

13. On fait l'hypothèse de possibilité du problème $\mathrm{P}(b + \lambda s^0, c)$, et soit s une direction quelconque. Il existe évidemment $\mu > 0$ tel que $\mu s \geqslant \lambda s^0$, auquel cas $b + \mu s \geqslant b + \lambda s^0$. Conformément à l'exer. 3, le problème $\mathrm{P}(b + \mu s, c)$ est possible, et l'exercice précédent dit qu'il en est ainsi de $\mathrm{P}(b + \gamma s, c)$ pour tous les $0 \leqslant \gamma \leqslant \mu$.

14. On suppose la direction s telle que $\langle s, p\rangle \geqslant 0$ pour chaque $p \in K^{P^0}$. Soit la représentation $P = M^P + K^P$ de l'ensemble admissible du problème $\mathrm{D}(b, c)$. Le problème étant possible par hypothèse, on a $\langle b, p\rangle = 0$ pour tout $p \in K^{P^0}$ et $\langle b, p\rangle > 0$ pour tout $p \in K^P \setminus K^{P^0}$. Soient $p^1, p^2, \ldots, p^r$ tous les rayons extrêmes $\notin K^{P^0}$ du cône polyédrique K^P. On choisit un nombre $\lambda > 0$ pour lequel on a $\langle b, p^i\rangle \geqslant -\lambda\langle s, p^i\rangle$, $i = 1, 2, r$. Comme tout vecteur $p \in K^P$ s'écrit

$$p = \sum_{i=1}^{r} p^i + \sum_{j=1}^{l} p^j,$$

avec

$$p^i \in K^P \setminus K^{P^0},$$
$$i = 1, 2, \ldots, r, \quad p^j \in K^{P^0}, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

on a

$$\langle b+\lambda s,\ p\rangle=\sum_{i=1}^{r}\langle b,\ p^i\rangle+\lambda\sum_{i=1}^{r}\langle s,\ p^i\rangle+\sum_{j=1}^{l}\langle b,\ p^j\rangle+\sum_{j=1}^{l}\lambda\langle s,\ p^j\rangle.$$

Par hypothèse $\langle s, p^j\rangle \geqslant 0$, $\langle b, p^j\rangle \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$, si bien que $\langle b + \lambda s, p\rangle \geqslant 0$ pour tous les $p \in KP$. Soit d la valeur du problème D (b, c). Il est clair que $\langle p,\ b + \lambda s\rangle \geqslant d$ quel que soit $p \in P$. On en conclut, par le théorème 3.1, que D $(b + \lambda s, c)$ (donc P $(b + \lambda s, c)$) est possible.

Inversement, soit $\langle s, \bar{p}\rangle < 0$ pour un $\bar{p} \in K^{P^0}$ et $p^* \in M^P$. Prenons des vecteurs $p^* + \mu\bar{p}$, $\mu > 0$. Dans ce cas, $\langle b + \lambda s,\ p^* + \mu\bar{p}\rangle = \langle b,\ p^*\rangle + \lambda\langle s, p^*\rangle + \lambda\mu\langle s, \bar{p}\rangle$ (parce que $\langle b, \bar{p}\rangle = 0$). Il en résulte que la fonction économique de D $(b + \lambda s, c)$ n'est minorée pour aucun λ et pour μ tendant vers ∞.

15. On prend comme s les vecteurs $\pm v^i$. L'exercice 14 donne $\langle v^i,\ p\rangle = p_i \geqslant 0$, $\langle -v^i,\ p\rangle = -p_i \geqslant 0$, i.e. $p_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, pour tout $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in K^{P^0}$. Cela signifie que $K^{P^0} = 0$ et que l'ensemble P^0 coïncide avec le polyèdre M^{P^0}.

16. Selon l'affirmation de l'exer. 14, $\langle s, p\rangle \geqslant 0$ pour tous les $p \in K^{P^0}$. La conséquence 1 du théorème 3.10 entraîne qu'il suffit de prouver l'égalité

$$\min_{p\in P_0}\langle s,\ p\rangle=\min_{1\leqslant i\leqslant k}\langle s,\ p^i\rangle,$$

avec $p^1, p^2, \ldots, p^k$ les points extrêmes du polyèdre M^{P^0}. Tout vecteur $p \in P^0$ s'écrit $p = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i p^i + \bar{p}$, où $\bar{p} \in K^{P^0}$. Dans ce cas,

$$\langle s,\ p\rangle=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\langle s,\ p^i\rangle+\langle s,\ \bar{p}\rangle\geqslant\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\langle s,\ p^i\rangle,$$

d'où le résultat voulu ($\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$).

17. Le résultat découle de suite de l'exer. 16.

18. La théorie de la dualité fait que si le primal est possible, le dual

$$\min\ \langle b,\ p\rangle$$
$$A'p = c$$

possède également une solution p^*. Soit x^0 un vecteur réalisable quelconque du primal, auquel cas $\langle b, p^*\rangle = \langle Ax^0, p^*\rangle = \langle x^0, A'p^*\rangle = \langle x^0, c\rangle$. Par conséquent, la fonction économique reste constante sur tout l'ensemble des vecteurs réalisables.

19. La convexité de $x_1^2 + x_1^2$ est démontrée de même que celle d'un disque (voir ch. II). On démontre la concavité de $\sqrt{x_1 + x_2}$. Il suffit de vérifier la justesse de l'inégalité

$$\sqrt{\alpha x_1+\alpha x_2+\beta y_1+\beta y_2}\geqslant\alpha\sqrt{x_1+x_2}+\beta\sqrt{y_1+y_2}$$

pour tout $\alpha \geqslant 0$ et tout $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Tous les termes de l'inégalité sont non négatifs, si bien qu'elle est équivalente à

$$\alpha x_1+\alpha x_2+\beta y_1+\beta y_2\geqslant\alpha^2(x_1+x_2)+2\alpha\beta\sqrt{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}+\beta^2(y_1+y_2).$$

On utilise l'inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique, il vient que le second membre de l'inégalité à démontrer est au plus égal à $\alpha^2 (x_1 + x_2) + \alpha\beta (x_1 + x_2 + y_1 + y_2) + \beta^2 (y_1 + y_2)$. Vu que $\alpha + \beta = 1$, on constate que la quantité obtenue coïncide avec le premier membre.

CHAPITRE IV

1. On vérifie de suite que le point selle est le couple stratégique (n, n).

2. Selon le lemme 4.2, la stratégie x^0 est bonne pour A si elle lui garantit un gain au moins égal à la valeur v du jeu contre toute stratégie pure de B. L'ensemble X^0 des stratégies optimales de A est défini par le système de conditions

$$A'x \geqslant v_n, \quad \langle x, e\rangle = 1, \quad x \geqslant 0,$$

où v_n est un vecteur n-dimensionnel, qui a toutes ses coordonnées égales à v, et e un vecteur de dimension m dont toutes les coordonnées sont 1.

3. Le résultat découle de (4.7).

4. Si S est un sous-ensemble isolé correspondant à A, alors $N \setminus S$ est manifestement un sous-ensemble isolé pour A'.

5. L'affirmation découle immédiatement du théorème de Frobenius-Perron.

6. Impossible à vérifier. En effet, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est par exemple indécomposable et $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

7. La propriété 1) résulte de la caractéristique de λ_A en tant que plus grande valeur propre non négative de la matrice A et du fait que A et A' ont mêmes valeurs propres.

La propriété 2) est une conséquence des faits suivants: chaque valeur propre de la matrice A^k s'écrit λ^k, λ étant une valeur propre de A ; $|\lambda| \leqslant |\lambda_A|$.

On procède de même en ce qui concerne 3).

Dans le cas 4), on utilise la caractéristique de λ_A en tant que zéro d'une fonction $u(\lambda)$ monotone décroissante (voir (4.16)). On conçoit que si $B \geqslant A$, alors la fonction associée $u_B(\lambda)$ vérifie $u_B(\lambda) \geqslant u(\lambda)$, d'où le résultat « le zéro λ_B de $u_B(\lambda)$ est à droite du zéro λ_A de la fonction $u(\lambda)$ ».

8. On suppose A décomposable, $S \subseteq N$ étant un sous-ensemble isolé. Quels que soient $i \in S$, $j \notin S$, il y a non-existence de la suite de l'exercice. En effet, cette suite doit nécessairement contenir $a_{i_t i_{t+1}}$, $i_t \in S$, $i_{t+1} \notin S$. Or, cet élément est nul par définition de S.

Faisons l'hypothèse de A indécomposable et de i_0, j_0 tels qu'on ne saurait les relier par la suite de l'exercice. On désigne par S l'ensemble des indices qui forment avec i_0 une suite analogue. On a $S \neq N$ du moment que $j_0 \notin S$. Si l'on suppose que $S = \varnothing$, cela signifie que la matrice A a la ligne a_i nulle, ce qui est exclu pour une matrice indécomposable. On voit aisément que S est un sous-ensemble isolé car $a_{ij} = 0$ si $i \in S$, $j \notin S$. En effet, si $a_{ij} > 0$, la suite réunissant i_0 et i plus l'élément j donnent une suite comprenant i_0 et j : contradiction avec $j \notin S$. La présence du sous-ensemble isolé S dans la matrice A supposée indécomposable constitue une contradiction démontrant notre affirmation.

9. Comme $\overline{x}^T = x^T$ (si bien que le nombre $\langle c, \overline{x}^T\rangle$ est égal à la valeur du problème), on a le résultat cherché sous la condition suffisante que la trajectoire $\{\overline{x}^t\}$ respecte les contraintes du problème (4.26). En effet,

$$A\overline{x}^t = AA^{T-1}x^T = A^{T-(t-1)}x^T = x^{t-1},$$

$$t = 2, 3, \ldots, T, \quad A\overline{x}^1 = A^T x^T \leqslant x^0.$$

On obtient facilement la dernière inégalité à partir des conditions du problème (4.27).

10. On note que les variables du problème ne sont pas astreintes à être non négatives. Aussi les contraintes du dual sont du type égalité:

$$\min \langle x^0, p^0 \rangle$$
$$p^{t+1} = A'p^t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,$$
$$\langle p, {}^T\hat{x} \rangle = 1, \quad p^t \geqslant 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T.$$

La suite de la démonstration imite le texte du paragraphe.

11. On vérifie immédiatement que si la matrice A est de la forme (4.27), alors

$$A^m = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{A} \end{pmatrix},$$

où $\bar{A} = A_0 A_1 \ldots A_{m-1}$.

12. On agit par l'absurde, auquel cas on trouve une suite x^k telle que $\| x^k \| = 1$, $Ax^k < x^k$ et un indice j, $\lim\limits_{k \to \infty} x_j^k = 0$. On estime que x^k est convergente. Soit $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^0$. Dans ce cas, $Ax^0 \leqslant x^0$, et $x_j^0 = 0$ contredit la conséquence du lemme 4.5.

CHAPITRE V

1. L'affirmation est évidente. En effet, si $Ax = b$, alors $QAx = Qb$ et, inversement, si $QAx = Qb$, alors $Q^{-1}QAx = Q^{-1}Qb$, i.e. $Ax = b$.

2. On fait la différence de chaque équation du second système et de l'équation correspondante du premier:

$$\sum_{j \in \omega} (\alpha_{ij} - \beta_{ij}) x_j = \alpha_{i0} - \beta_{i0}, \quad i \in \sigma.$$

Les variables x_j, $j \in \omega$, étant libres, les égalités obtenues sont vérifiées pour x_j quelconque, $j \in \omega$. D'où le résultat voulu.

3. Prenons un point $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$, avec $0 < \alpha \leqslant 1$. Dans ce cas,

$$\langle c, x \rangle = \alpha \langle c, x^1 \rangle + (1 - \alpha) \langle c, x^2 \rangle >$$
$$> \alpha \langle c, x^2 \rangle + (1 - \alpha) \langle c, x^2 \rangle = \langle c, x^2 \rangle,$$

pour tout α positif.

D'autre part, la distance de x et x^2 peut être aussi petite qu'on le veut à condition de prendre α assez faible:

$$\| x - x^2 \| = \| \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2 - x^2 \| = \alpha \| x^1 - x^2 \| \to 0,$$

pour $\alpha \to 0$.

4. Soit $x^* \in X$ un maximum local dans un problème de programmation linéaire. Faisons l'hypothèse de x^* non global, i.e. on trouve un point $\bar{x} \in X$ tel que $\langle c, \bar{x} \rangle > \langle c, x^* \rangle$. Selon l'exercice précédent, tout voisinage de x^* renferme un point $x \in X$ pour lequel $\langle c, x \rangle > \langle c, x^* \rangle$: contradiction avec la définition d'un maximum local.

5. Si $L_1 = L_2$ et $x^1 - x^2 = l \in L_1$, on a

$$P_2 = x^2 + L_2 = x^1 - l + L_1 = x^1 + L_1 = P_1.$$

Inversement, on suppose que $P_1 = P_2$. On a $x^2 = x^1 + l$, où $l \in L_1$, i.e. $x^1 - x^2 = -l \in L_1$, d'où $x^1 + L_1 = P_1 = P_2 = x^2 + L_2 = x^1 + l + L_2$. Donc, $L_1 = l + L_2$, i.e. $L_1 = L_1 - l = L_2$.

6. Le vecteur $x = 0$ est un vecteur réalisable pour le problème donné. Le problème dual s'écrit

$$\min \langle 0, p\rangle$$
$$A'p \geqslant c,$$

si bien que la valeur d du primal est nulle, auquel cas $d = 0 = \langle c, 0\rangle$.

7. Le problème possède un vecteur réalisable unique (1, 0, 0) qui est optimal. Si l'on prend pour base associée le système $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ de colonnes de la matrice des contraintes, on obtient le tableau du simplexe

		Δ_1	Δ_2	Δ_3
$\langle c, x\rangle$	1	0	0	-1
x_1	1	1	0	-1
x_2	0	0	1	1

où $\Delta_3 < 0$.

8. On suppose que la direction s est admissible au point x^0. Dans ce cas, 1) $x^0 + \lambda s \geqslant 0$, 2) $A(x^0 + \lambda s) = b$. On déduit de 1): $Ax^0 + \lambda As = b + \lambda As = b$, i.e. $\lambda As = 0$, d'où $As = 0$. Si $x_j^0 = 0$, les conditions $\lambda > 0$ et 2) donnent $s_j = 0$. La réciproque est évidente.

9. Soit $\langle c, s\rangle \leqslant 0$ pour toute direction s admissible au point x^0 et soit $x \in X$ un point quelconque. Le point $x^0 + \lambda(x - x^0)$ est pour tout λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, dans X (X est convexe). Par conséquent, la direction $s = x - x^0$ est admissible en x^0, auquel cas $0 \geqslant \langle c, x - x^0\rangle = \langle c, x\rangle - \langle c, x^0\rangle$, i.e. $\langle c, x^0\rangle \geqslant \langle c, x\rangle$. La réciproque est triviale car il s'agit de démontrer qu'un maximum global est local.

10. Soit s une direction quelconque admissible en x^0, $\sigma = \{j \mid x_j^0 = 0\}$. Les exercices 8, 9 entraînent l'implication

$$As \leqslant 0, \quad -As \leqslant 0, \quad \langle s, e^j\rangle \geqslant 0, \quad j \in \sigma \Rightarrow \langle c, s\rangle \leqslant 0.$$

Le théorème 2.27 dit qu'il existe dans ce cas une solution non négative au système d'équations $Au - Av - w = c$, où $w_j = 0$ si $j \notin \sigma$. On introduit la notation $p^0 = u - v$ et on a l'affirmation voulue. Inversement, soit p^0 et $w \geqslant 0$ des vecteurs tels que $c = A'p^0 - w$, $\langle x^0, w\rangle = 0$.

On vérifie de suite l'implication $As = 0$, $\langle s, e^j\rangle = 0$, $j \in \sigma \Rightarrow \langle c, s\rangle \leqslant 0$, i.e. la fonction économique décroît dans toute direction admissible en x^0. Selon l'exer. 9, x^0 est un programme optimal du problème (5.2).

11. Si $\Delta \geqslant 0$, on prend ce vecteur pour w de l'exercice précédent parce que $\Delta = A'p^0 - c$, où $p^0 = (A'_\sigma)^{-1}c_\sigma$ et $\langle \Delta, x^0\rangle = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages fondamentaux

[1] Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*, Наука, Москва, 1971. Trad. française : A. Kurosh, *Cours d'algèbre supérieure*, Ed. de Moscou, 1973.
[2] Мальцев А. И., *Основы линейной алгебры*, Наука, Москва, 1970.
[3] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., *Линейное программирование, теория, методы и приложения*, Наука, Москва, 1969.
[4] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., *Новые направления в линейном программировании*, Советское радио, Москва, 1966. Trad. française : E. Golstein, D. Youdine, *Problèmes particuliers de la programmation linéaire*, Ed. de Moscou, 1973.
[5] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., *Задача линейного программирования транспортного типа*, Наука, Москва, 1969.
[6] *Linear inequalities and related systems.* Edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princenton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1956.
[7] Dantzig G. B., « *Linear programming and extensions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.
[8] Gass S. I., *Linear programming*, MacGraw-Hill, New York, 1958.
[9] Gale D., *The theory of linear economic models*, MacGraw-Hill, New York, 1960.
[10] Заславский Ю. Л., *Сборник задач по линейному программированию*, Наука, Москва, 1969.

Autres ouvrages

[11] Stigler G. J., « The cost of subsistence », *Journal of Farm Economics*, 1945, № 27.
[12] Wangh F. V., « The minimal-cost dairy feed », *Journal of Farm Economics*, August 1951.
[13] Александров А., Лурье А., Олейник Ю. «Применение электронных вычислительных машин в оперативном планировании », *Автомобильный транспорт*, 1959, № 6.
[14] Leontief W. W., *Studies in the structure of the american economy*, New York, 1953.
[15] Коссов В. В., *Межотраслевой баланс*, Экономика, Москва, 1966.
[16] Гребцов Г. И., Смехов Б. М., Смоляр Л. И., *Основы разработки межотраслевого баланса*, Экономиздат, Москва, 1961.
[17] *Моделирование народнохозяйственных процессов*, Réd. В. С. Дадаян, Экономика, Москва, 1973.
[18] Канторович Л. В., *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов*, Изд. АН СССР, Москва, 1960. Trad. française : L. V. Kantorovitch, *Calcul économique et utilisation des ressources* Coll. Finances et Economie appliquée, Dunod, vol. XV, 1963.
[19] von Neumann J., Morgenstern O., *Theory of games and economic Behavior*, Princeton Univ. Press, 1953.
[20] Owen G., *Game theory*, Philadelphia-London-Toronto, 1968.

[21] Бондарева О. Н. « Некоторые применения методов линейного программирования и теории кооперативных игр ». Проблемы кибернетики, 1963, № 10, стр. 121-139.
[22] Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M., *Linear programming and economic analysis*, MacGraw-Hill, New York, 1958.
[23] Appel K., Haken W., «Every planar map is four colorable», *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1976, 82, № 5.
[24] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., *Дискретное программирование*, Наука, Москва, 1969.
[25] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва. Trad. française : A. Tikhonov, V. Arsénine, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Ed. de Moscou, 1976.
[26] Ашманов С. А., *Математические модели и методы в экономике*, Изд-во МГУ, Москва, 1980.
[27] Хачиян Л. Г., «Полиномиальный алгоритм в линейном программировании», *ДАН СССР*, 1970, 244, № 5, с. 1093-1096.
[28] Хачиян Л. Г., «Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании, *ЖВМ и МФ*, 1980, 20, № 1, с. 51-68.

INDEX

Algorithme de Gomory 206
Arc 180

Base
associée à un programme de base 135
— à un vecteur de base 161
Bilan des échanges inter-industriels 15

Chemin 181
Coalition 104
Cœur d'un jeu coopératif 103, 105, 111
Combinaison linéaire convexe 42
Condition de coupe 206
Condition d'efficacité 206
Cône
convexe 39
dual 40
pointé 49
polyédrique 47
solide 232
Conséquence d'un système d'inéquations 63
Coûts duals 83
Crible d'Eratosthène 216
Cycle 211
Cycle d'un graphe 181

Décomposition des programmes linéaires 219
Dérivée dans une direction 28, 92
Dimension
d'un ensemble convexe 45
d'une variété linéaire 44
Direction possible 94

Ensemble
admissible 71
convexe 33-35
polyédrique convexe 60, 61
régulier 56
des solutions des problèmes de programmation linéaire 80
des vecteurs réalisables 51, 71
Enveloppe
conique 47
convexe 43

Fonction
caractéristique d'un jeu 104
concave 85
convexe 84
économique 26, 71
positivement homogène 84
Fonction de valeur d'un problème 82

Gradient 28, 89

Hyperplan 35
d'appui 37

Imputation 105
Itération de la méthode du simplexe 146

Jeu 95
coopératif 103
matriciel 95
symétrique 105

Matrice
bloc-diagonale 220
des coefficients des contraintes 22, 25
— — du problème de transport 180
imprimitive 120
indécomposable 112
d'un jeu 96
non négative 111
de passage 140
primitive 120
technologique 14
Méthode
du coin nord-ouest 183
de coupes 202, 203
duale du simplexe 160, 164
des ellipsoïdes 240
du pivotage de Gauss-Jordan 130
des potentiels 191
de régularisation 226
révisée du simplexe 157, 191
du simplexe 137, 145
—, algorithme 145
de troncature 202
Modèle de Leontief 18
généralisé 20, 115
Multiplication scalaire d'un système d'inéquations 72

Normale 35

Ordre lexicographique 147
Orthant positif 38

Point
extrême 44
frontière 52
intérieur 52
Point selle
d'une fonction 101
d'un jeu 99
Polyèdre
convexe 46
entier 204
Principe du maximum 125
Problème(s)
d'affectation 198
dual 68
— d'un programme sous forme canonique 69
— — — standard 69
— — général 71
dual-non dégénéré 164
sous forme canonique 22, 132
— standard 22
général 23, 25
du havresac 197
lexicographique 174
en nombres entiers 197
non dégénéré 135
perturbé 227
de programmation linéaire 22
des quatre couleurs 200
du régime alimentaire 9-12
stable 226, 227, 234, 236
— par rapport à la fonctionnelle 227, 234
— — à la solution 227, 234
de transport 12, 179
du voyageur de commerce 198
Programme 26
de base 134
— initial 138, 148, 149
— — non dégénéré 135
— — du problème de transport 183
optimal 26
Programme de production 14
Programme de transport 13

Pseudo-programme 161
initial 171
non dégénéré 163
strictement réalisable 170

Rang d'une matrice 53
Réseau de transport 180
connexe 181

Stratégie dans un jeu 95
bonne 99
maximin 99
maximax 99
mixte 100
Support d'un point frontière 52
Système réduit d'équations 130, 167

Tableau du simplexe 139, 167
sous forme lexicographique 166, 170
Théorème(s)
de dualité 73, 78
d'équilibre 73, 75
ergodique 121
de Minkowski 67
de séparation 32, 35, 38
de substitution de Samuelson 116
du turnpike 119, 121
de von Neumann 6, 101
Transformation élémentaire d'un système d'équations 130

Valeur d'un jeu 99
maximum 98
minimum 98
Valeur d'un problème 26, 71
Valeur propre de Frobenius 115
Variable de base 130
Variété linéaire 44
Vecteur
de base 161
demande finale 18, 20
directeur d'une droite 33
extrémal 49
d'incidence à une coalition 107
d'inputs totaux de travail 118
intérieur à un cône 232
réalisable 26
des ressources 14
Vecteur propre de Frobenius 115

TABLE DES MATIÈRES

Préface 5

Chapitre premier. MODÈLES LINÉAIRES 8

§ 1. La programmation linéaire et les modèles linéaires . . . 8
§ 2. Exemples de modèles linéaires 9
§ 3. Formes des problèmes de programmation linéaire et leur équivalence 22
§ 4. Résolution numérique des problèmes de programmation linéaire 27

Chapitre II. POLYÈDRE CONVEXE ET INÉQUATIONS LINÉAIRES 30

§ 1. Interprétation géométrique des problèmes de programmation linéaire 30
§ 2. Ensembles convexes et théorèmes de séparation 32
§ 3. Ensembles convexes polyédriques 42
§ 4. Structure des ensembles admissibles des problèmes de programmation linéaire 51
§ 5. Equivalence de deux définitions d'un ensemble polyédrique convexe 60
§ 6. Inéquations linéaires 63
Exercices 66

Chapitre III. THÉORIE DE LA DUALITÉ 68

§ 1. Problème dual en programmation linéaire 68
§ 2. Théorème de dualité 71
§ 3. Une démonstration sommaire du théorème de dualité . . . 78
§ 4. Ensemble des solutions des problèmes de programmation linéaire 80
§ 5. Interprétation des coûts duals et propriétés de dérivabilité de la fonction de valeur 82
Exercices 93

Chapitre IV. APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE LA DUALITÉ 95

§ 1. Théorème fondamental des jeux matriciels 95
§ 2. Sur l'existence du cœur d'un jeu coopératif à n personnes 103
§ 3. Propriétés des matrices non négatives 111
§ 4. Effet de substitution dans le modèle généralisé de Leontief 115
§ 5. Théorème du turnpike pour le modèle dynamique de planification 119
§ 6. Principe du maximum pour les problèmes linéaires de commande optimale à temps discret 125
Exercices 128

Chapitre V. THÉORIE DE LA MÉTHODE DU SIMPLEXE 130

§ 1. Méthode du pivotage de Gauss-Jordan pour les systèmes d'équations linéaires 130
§ 2. Programmes de base 132
§ 3. Méthode du simplexe pour un programme linéaire non dégénéré 137
§ 4. Programmes linéaires dégénérés 146
§ 5. Recherche d'un programme de base initial 149
§ 6. Un exemple de résolution numérique des programmes linéaires 153
§ 7. Méthode révisée du simplexe 157
Exercices 159

Chapitre VI. MÉTHODE DUALE DU SIMPLEXE 160

§ 1. Pseudo-programmes et règles de la méthode duale du simplexe 160
§ 2. Méthode duale du simplexe pour un problème avec contrainte additionnelle 164
§ 3. Tableau simplicial sous forme lexicographique. 166
§ 4. Méthode duale sous forme lexicographique 170
§ 5. Recherche d'un pseudo-programme initial 171
§ 6. Problème lexicographique de la programmation linéaire 174

Chapitre VII. PROBLÈMES PARTICULIERS DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE 179

§ 1. Problème de transport et réseaux de transport. 179
§ 2. Recherche d'un programme de base initial du problème de transport par la méthode du coin nord-ouest 183
§ 3. Programmes de base du problème de transport et dégénérescence 187
§ 4. Problème de transport et méthode des potentiels 191
§ 5. Programmes linéaires en nombres entiers 197
§ 6. Méthode de coupes en programmation linéaire en nombres entiers 203
§ 7. Premier algorithme de Gomory pour les problèmes de la programmation linéaire en nombres entiers 206
§ 8. Décomposition des programmes linéaires 219

Chapitre VIII. MÉTHODE DE RÉGULARISATION DES PROBLÈMES INSTABLES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE . . . 226

§ 1. Notion de stabilité des programmes linéaires 226
§ 2. Systèmes paramétriques d'inéquations linéaires 228
§ 3. Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des problèmes de programmation linéaire 232
§ 4. Régularisation des problèmes instables 237

Annexe. SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE EN PROGRAMMATION LINÉAIRE 240

Discussion des exercices 242

Bibliographie 251

Index 253